MATEMÁTICAS

PRIMER CURSO

4 mayo 1963 - B. O. M. E. 13 mayo 1963

48 ptas.

EDELVIVES

MATEMÁTICAS

PRIMER CURSO

POR

EDELVIVES

Aprobado por O. M. del 4-V-1963
«B. O. M. de E. N.». núm. 38, del 13-V-1963
Año de publicación: 1965 — Precio: 48 ptas.

EDITORIAL LUIS VIVES, S. A.
Zaragoza

© *Editorial Luis Vives, S.A., Zaragoza 1965*

N.º Registro: 1.205 - 62

ES PROPIEDAD DEPÓSITO LEGAL Z. 126 - 58 PRINTED IN SPAIN

EDITORIAL LUIS VIVES, S.A., P.º Fernando el Católico, 63 - Zaragoza

1. Los números naturales

1. **Unidad y conjunto.** — Todos sabemos distinguir una sola cosa de varias; es decir, tenemos idea de *unidad* y de *pluralidad* o *conjunto.*

EJEMPLO. — Los alumnos de una clase forman un conjunto y cada alumno es una unidad de dicho conjunto.

2. **Unidad colectiva.** — Si consideramos las varias clases de que se compone nuestro colegio, tenemos un conjunto de clases, y la unidad es la clase dentro de este conjunto; ahora bien, como la clase a su vez es un conjunto de alumnos, decimos que la clase es una *unidad colectiva.*

> **Unidad colectiva es un conjunto que a su vez es unidad de otro conjunto.**

3. **Conjuntos coordinables.** — Si dos conjuntos son tales que a cada elemento del primero se le puede hacer corresponder un elemento del segundo, y a la inversa, sin que ningún elemento quede sin su elemento correspondiente, se dice que los dos conjuntos son *coordinables.* Decimos también que entre tales conjuntos puede establecerse *una correspondencia biunívoca.*

> **Dos conjuntos son coordinables cuando entre ellos puede establecerse una correspondencia biunívoca.**

4. **La sucesión de los números naturales.** — Consideremos los siguientes conjuntos formados por puntos:

• •• ••• •••• etc.

Si ahora damos un nombre a cada colección de puntos, y la designamos por un símbolo, construiremos *la sucesión de los números naturales:*

• uno 1
•• dos 2
••• tres 3
•••• cuatro 4
••••• cinco 5
•••••• seis 6
••••••• siete ..... 7, etc.

Es evidente que por grande que sea la colección de puntos, siempre es posible pensar en una colección con un punto más. Expresamos esto diciendo:

La sucesión de los números naturales es ilimitada, es decir, no tiene fin.

5. **La operación de contar.** — Contar los elementos de un conjunto es irlos *coordinando* (emparejando) con los elementos consecutivos de la sucesión de los números naturales y decir qué número de ésta corresponde al último elemento del conjunto.

El conjunto de los números naturales sirve para contar los elementos de cualquier otro conjunto.

6. **Números ordinales y números cardinales.** — Como acabamos de decir, para contar un conjunto se le hace corresponder a cada elemento un número natural de la sucesión; dicho número indica el orden del elemento y es su *número ordinal.* El número ordinal del último elemento es el *número cardinal* del conjunto.

7. **Postulado fundamental de la Aritmética.** — Al contar los elementos de un conjunto puedo hacerlo comenzando por un elemento distinto, con lo cual es posible que el número ordinal de un determinado elemento haya cambiado, pero no así el número cardinal del conjunto.

El número cardinal de un conjunto es independiente del orden en que se cuenten los elementos.

8. **Números iguales. Igualdad.** — Si dos conjuntos son coordinables, sus correspondientes números cardinales son iguales. Por ejemplo, si a es el número de sillas de una habitación y están todas ocupadas, y b es el número de personas con silla, el número a es igual al b. La expresión

$$a = b$$

constituye una igualdad, y se lee *a* igual a *b*. Lo que está a la izquierda del signo = se llama *primer miembro,* y lo que está a la derecha, *segundo miembro.*

Dos números son iguales si corresponden a conjuntos coordinables.
Igualdad es la expresión de que dos números son iguales.

9. **Números desiguales. Desigualdad.** — Si dos conjuntos no son coordinables, sus números correspondientes son desiguales.

Gráficamente, expresamos que un número es mayor, o menor, que otro escribiendo dichos números separados por los signos > (mayor que), o < (menor que), de manera que la abertura del ángulo esté del lado del mayor.

Si, por ejemplo, suponemos un conjunto de tazas y otro de cucharillas, y ocurre que hay más cucharillas que tazas, representando por *a* el número de tazas y por *b* el de cucharillas, escribiremos:

$$b > a \quad \text{o también} \quad a < b$$

Cada una de estas expresiones es una desigualdad, y para leerlas decimos, respectivamente, *b* mayor que *a* y *a* menor que *b*.

Desigualdad es la expresión de que dos números son desiguales.

10. **Números abstractos y números concretos.** — Al decir *ocho,* simplemente, nos formamos la idea de un conjunto de ocho elementos, pero no sabemos de qué clase de elementos se trata. Decimos, por ello, que ocho es un número *abstracto.* Pero si decimos: ocho mesas, ocho alumnos, ocho horas, etc., expresamos también la especie de las unidades, y tenemos entonces un número *concreto.*

Número abstracto es el que no indica la especie de sus unidades y número concreto es el que se refiere a una especie de unidades. Estos últimos se llaman cantidades.

EJERCICIOS

1. Dar cinco ejemplos de conjuntos y decir cuál es la unidad en cada uno de ellos.

2. Decir la unidad simple y la colectiva de los siguientes conjuntos: docenas de huevos; compañías de soldados; patrullas de buques; escuadrillas de aviación, rebaños de ovejas.

3. Suponiendo que las mesas de la clase son unipersonales, diga el alumno si es coordinable el conjunto «mesas» con el conjunto «alumnos».

4. ¿Con qué es coordinable el conjunto «ojales de un abrigo»?

5. Sin contarlas, ¿cómo podríamos averiguar si el número 3.243.879.516 tiene más, o menos, cifras que letras la palabra EJERCICIOS?

6. Contar los naipes de la baraja. Barajar y volver a contar. ¿Se obtendrá el mismo número de antes? ¿En qué principio se funda el resultado?

7. Diga cada alumno el número ordinal que le corresponde en la lista de clase. ¿Cuál es el número cardinal de la clase?

8. Escribir en orden las letras del abecedario y poner debajo de cada una el número ordinal que le corresponde. ¿Qué número cardinal es el del conjunto «abecedario»?

9. En un autocar hay asientos vacíos. Si el número de asientos es m y el de viajeros que van en el coche es n, expresar de dos maneras una desigualdad entre m y n.

10. Poner tres ejemplos de números abstractos y tres de números concretos.

11. Si consideramos un escuadrón de caballería, ¿los conjuntos «caballos», «soldados» y «uniformes» son coordinables? ¿Qué tienen de común? Representando por n el número de componentes del escuadrón, díganse los números concretos que corresponden a cada conjunto y el número abstracto común a ellos.

12. Tenemos una tira de papel y queremos hacer de ella diez trozos. ¿Cuántos cortes tenemos que dar?

13. En un jardín se ha plantado una fila de 25 rosales. Si se ha dejado un metro de separación entre cada rosal y el siguiente, ¿qué distancia habrá entre el primero y el último?

14. En dos puntos de una finca, distantes 120 metros, se han plantado sendos árboles. Entre ellos se quieren plantar luego nuevos árboles, de manera que todos estén en línea recta y a la distancia de 5 metros cada uno del siguiente. ¿Cuántos árboles habrá en total?

15 ¿Cuántos postes son necesarios para cercar de alambre una finca, cuyo contorno mide 2.187 metros, si entre poste y poste se quieren dejar tres metros de separación?

2. Numeración

11. Sistema de numeración. — Para representar los números naturales se emplean signos en la representación gráfica y palabras en la representación oral. Ante la imposibilidad de representar cada número por un signo o una palabra distinta, se ha creado un reducido número de signos y de palabras y unas cuantas reglas, mediante las cuales se puede representar cualquier número natural.

> **Sistema de numeración es el conjunto de reglas que nos permiten dar nombre y escribir cualquier número mediante un reducido número de palabras y de signos.**

12. Sistema de numeración decimal. — Nuestro sistema de numeración se llama decimal, porque la formación de unidades colectivas de diverso orden se hace de modo que *diez unidades de un orden forman una unidad del orden inmediatamente superior.*

Los signos empleados en la NUMERACIÓN ESCRITA o gráfica se denominan *cifras* y son los siguientes:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

Los nueve primeros números naturales son:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 [1]

El número natural que sigue al representado por la cifra 9 se representa por 10, y los números siguientes a éste se representan por el par de cifras que resultan al ir sustituyendo en 10 la cifra 0 por cada una de las cifras [1] en el mismo orden en que allí figuran. Es decir, tendremos:

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 [2]

El número siguiente al 19 se representa por 20, y para obtener los que siguen, hasta 29, se sigue el proceso anterior; lo mismo se hará hasta obtener el número representado por 99.

A continuación de 99 viene el número representado por 100, y a éste siguen los números representados por las cifras que resultan al sustituir en él el par de cifras 00 por los pares 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10; y a partir de aquí se sustituyen los números obtenidos en [2] y siguientes, hasta 99.

Con lo dicho, basta para deducir la regla general sobre la formación gráfica de los números naturales.

EJERCICIOS

1. *Escribir el número siguiente a los números:*

   27293; 43869; 577899; 164909; 164999; 529999.

2. *Escribir el número precedente a los números:*

   346592; 346590; 346500; 346000; 340000; 300000.

Para la NUMERACIÓN HABLADA u oral se ha convenido que los primeros números naturales reciban la denominación de uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve.

Los números 10, 100 1000, 10000, ..., se denominan diez, cien, mil, diez mil, ...

Según esto, el número 487563 puede enunciarse así: 4 cien miles, 8 diez miles, 7 miles, 5 cientos, 6 dieces (o decenas), tres. Lo que se abrevia diciendo: cuatrocientos ochenta y siete mil quinientos sesenta y tres.

EJERCICIOS

1. *Escribir gráficamente los siguientes números: Cuarenta (o cuatro decenas); trece decenas; setecientos veintiocho (o su equivalente: siete cientos, dos decenas, ocho); diecinueve cientos; cincuenta y dos cientos: treinta y cuatro millares.*

2. *Leer según la terminología usual los siguientes números: Treinta decenas; cuarenta y cinco cientos; ciento trece cientos; veinte millares, tres cientos, cuatro decenas, uno; siete diez miles, nueve miles, cinco dieces, dos.*

13. Unidades de orden superior.— Al número 1 se le llama *unidad simple* o *de primer orden;* al número 10, *decena* o *unidad de segundo orden;* al 100, *centena* o *unidad de tercer orden;* al 1000, *unidad de mil* o *de cuarto orden; ...*

Los órdenes se agrupan de tres en tres, formando las *clases,* y éstas se agrupan de dos en dos, formando los *períodos.*

Los tres primeros órdenes forman la clase de las *unidades;* los tres siguientes, la clase de los *miles;* luego vienen la clase de los *millones,* la clase de los *miles de millón,* la clase de los *billones, ...* Todo esto lo podemos resumir así:

CUADRO DE LOS ÓRDENES, CLASES Y PERÍODOS

Período de las UNIDADES	Clase de las *unidades* .	unidades simples	(primer orden)
		decenas	(segundo orden)
		centenas	(tercer orden)
	Clase de los *miles*	unidades de mil	(cuarto orden)
		decenas de mil	(quinto orden)
		centenas de mil	(sexto orden)
Período de los MILLONES	Clase de los *millones* ..	unidades de millón	(séptimo orden)
		decenas de millón	(octavo orden)
		centenas de millón	(noveno orden)
	Clase de los *miles de millón*	unidades de mil de millón	(décimo orden)
		decenas de mil de millón	(undécimo orden)
		centenas de mil de millón	(duocécimo orden)

(Siguen los períodos de los *billones, trillones, cuatrillones,* ...)

14. Empleo del cero.— Para indicar que un número carece de cierto orden de unidades se emplea el cero.

Por ejemplo: el número formado por 3 unidades de sexto orden, 7 de tercer orden y dos unidades simples, se escribirá: 300.702.

15. Valor absoluto y relativo de una cifra. — Toda cifra tiene dos valores: absoluto y relativo.

Valor absoluto de una cifra es el número de unidades simples que indica el signo que la representa.

Valor relativo de una cifra es el que le corresponde por el lugar que ocupa en el número.

Así, en el número 32.705, el valor absoluto del 7 es siete unidades simples, y su valor relativo es siete centenas o 700 unidades simples.

16. Numeración romana. — Para escribir los números, los romanos empleaban las siguientes letras (cifras romanas):

	I	V	X	L	C	D	M
valor:	1	5	10	50	100	500	1000

La formación de números está sujeta a las reglas siguientes:

I. Una letra escrita a la derecha de otra igual o de superior valor, añade a ésta su valor tantas veces como esté repetida.

EJEMPLOS: XXX = 30; LVII = 57; CLXXI = 171; DCCCLXXVI = 876

II. Una letra no puede repetirse más de tres veces consecutivas. No se repiten la V, L, D.

III. Cualquiera de las letras I, X, C, escrita a la izquierda de otra de mayor valor, le resta el suyo. Pero téngase en cuenta que:

la I se antepone sólo a la V y a la X;
la X se antepone sólo a la L y a la C;
la C se antepone sólo a la D y a la M.

EJEMPLOS: IX = 9; XL = 40; XC = 90; CD = 400; CM = 900.

Para escribir 99, pondremos XCIX y no IC; para escribir 490, pondremos CDXC y no XD; para escribir 999, pondremos CMXCIX y no IM.

IV. Una letra escrita entre dos de mayor valor, no suma el suyo a la que le precede, sino que se lo resta a la que le sigue.

EJEMPLOS: XIX = 19; CIV = 104; CMXC = 990; MCD = 1.400.

V. Sólo pueden repetirse las letras que actúan como sumandos y no las que actúan como sustraendos.

Según esto, estarán mal escritos los números IIV, XXXC y CCD.

VI. Una raya colocada encima de un número hace que represente millares; dos rayas, millones, etc.

EJEMPLOS: $\overline{IV}DIX = 4.509$; $\overline{V}VI = 5.006$; $\overline{\overline{CDXCIV}} = 494{,}000.000$

La numeración romana se emplea aún hoy para indicar los capítulos y párrafos en los libros, para expresar las horas en los relojes, para escribir las fechas en los monumentos, etc.

EJERCICIOS

16. ¿Cuántos números hay de dos cifras? ¿Cuántos de tres, de cuatro, etc., cifras?

17. ¿Cuál es el menor de los números de cinco cifras? ¿Y cuál es el mayor?

18. Escribir todos los números de tres cifras que tienen el 8 por cifra de las centenas y el 5 por cifra de las unidades.

19. Indicar el valor absoluto y el relativo de las cifras del número 3.207.891.

20. ¿Qué orden de unidades representa el 5 en los números: 25; 250; 5.900?

21. Decir el orden de cada una de las cifras del número 302.496.175.

22. Leer los números: 1300009; 100000730025; 101001001001001.

23. Escribir en la numeración romana: 1; 2, 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100; 200; 300; 400; 500; 600; 700; 800; 900; 1000.

24. ¿Cuál es el número mayor que puede escribirse con cifras romanas sin emplear raya superpuesta.

25. Leer los números: LXIX; DLVI; CXL; CXC; $\overline{IV}XII$, MMCCXXII; MMDCCCLXXXVIII; $\overline{\overline{XVI}}\overline{CCCLXV}CMXLI$.

26. Escribir con cifras romanas:
99; 146; 507; 889; 1.004; 1.964; 20.101; 3.012.304.

3. La adición

17. Suma de números naturales. — Sobre la mesa hay tres grupos de cuadernos: el primero está formado por 8 cuadernos, el segundo por 13 y el tercero por 6. ¿Cuántos cuadernos hay en total?

Diremos:

$$8 + 13 + 6 = 27$$

Aunque hemos procedido por cálculo mental, para contestar a la pregunta que se nos ha hecho bastaría con *reunir* todos los cuadernos en un solo grupo y contarlos después. Al número 27 lo llamamos *suma* de los números 8, 13 y 6, y *adición* a la operación que sirve para obtenerlo, sin tener que contar una a una las unidades de que está formado.

> **Suma de dos o más números es otro número obtenido al reunir en un solo grupo todas las unidades de los números dados. Adición es la operación que tiene por objeto hallar rápidamente la suma de varios números.**

Los números dados se llaman *sumandos*. Para indicar una adición se escriben los sumandos separados por una +, que se lee *más*. Así, si representamos por *a, b* y *c* a tres números cualquiera, su suma vendrá expresada por

$$a + b + c$$

18. Propiedades de la suma. — Supongamos que queremos hallar mentalmente la suma 230 pesetas + 140 pesetas. Diremos:

$$230 + 140 = 200 + 100 + 30 + 40 = 300 + 70 = 370$$

Observando lo que hemos hecho, podemos comprobar las siguientes propiedades de la suma:

1) CONMUTATIVA. **Si se altera el orden de los sumandos, el valor de la suma no varía.**

2) ASOCIATIVA. **En una suma se pueden sustituir dos o más sumandos por su suma efectuada.**

3) DISOCIATIVA. **En una suma se puede descomponer un sumando en otros varios.**

19. Práctica de la suma y cálculo mental. — I. SUMA DE DOS NÚMEROS DE UNA SOLA CIFRA. Esta suma debe saberse de memoria; de no ser así, la encontraremos en la siguiente tabla:

TABLA DE SUMAR

0	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	**14**	15	**16**	**17**
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para usarla se busca uno de los números en la primera línea horizontal y el otro en la primera vertical; la suma se encuentra en el cruce de las líneas que comienzan con tales sumandos.

II. SUMA DE UN NÚMERO DE VARIAS CIFRAS Y OTRO DE UNA SOLA. Sean, por ejemplo, las sumas 463 + 5 y 819 + 7.

La operación se efectúa mentalmente, procediendo como sigue:

$$463 + 5 = 460 + 3 + 5 = 460 + 8 = 468$$
$$819 + 7 = 810 + 9 + 7 = 810 + 16 = 826$$

¿Qué propiedades de la suma hemos aplicado?

III. SUMA DE NÚMEROS DE DOS CIFRAS. Sea la suma 56 + 78.
Para hallar mentalmente esta suma seguiremos el siguiente proceso:

$$56 + 78 = (50+70) + (6+8) = 120 + 14 = 134$$

El paréntesis se usa para indicar que el resultado de la operación expresada en el interior es un dato de otra operación.

IV. SUMA DE NÚMEROS CUALESQUIERA. Efectuar, por ejemplo, la suma

$$36.965 + 79.208 + 831$$

Hemos escrito los números unos debajo de otros, haciendo que aparezcan en la misma columna las unidades del mismo orden. Cuando la suma de las cifras de una columna ha pasado de 9, hemos escrito solamente la cifra de las unidades, y las decenas se han agregado a la columna siguiente. Con esto, no hemos hecho sino tener en cuenta que cada diez unidades de un orden forman una unidad del orden inmediato superior.

```
  36965
+ 79208
+   831
-------
 117004
```

Indíquense qué propiedades de la suma se aplican al efectuar la operación según la regla conocida.

20. Prueba de la suma. — Una manera de comprobar si la suma está bien hecha es repetir la operación sumando los datos en otro orden, de abajo arriba por ejemplo. El resultado, de acuerdo con la propiedad conmutativa, ha de ser el mismo.

CÁLCULO MENTAL

1. *Contar de* 3 *en* 3, *a partir de* 3, 2 *y* 1, *hasta* 60.
2. *Contar de* 4 *en* 4, *desde* 4, 3, 2 *y* 1, *hasta* 100.
3. *Efectuar sumas como éstas:*

a) 36 + 10	*c)* 40 + 65	*e)* 50 + 70 + 90
b) 28 + 30	*d)* 63 + 70	*f)* 160 + 80

4. *Ídem como las siguientes:*

a) 17 + 12	*c)* 19 + 36	*e)* 13 + 19 + 28
b) 35 + 28	*d)* 45 + 69	*f)* 386 + 72

5. *Hallar cuatro números que sumen 30. ¿Hay más de una solución?*

6. *La suma de tres números es 46. ¿Cuál será la suma de los números que resultan al añadir 4 unidades a cada uno de los sumandos?*

EJERCICIOS

27. Efectuar las siguientes adiciones:

a)
$$\begin{array}{r} 32.746 \\ +\ 4.809 \\ +\ 20.641 \\ +\ \ 72 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 5.911 \\ +\ \ 607 \\ +\ 28.348 \\ +\ \ 1.453 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 37 \\ +\ 7.809 \\ +\ 14.223 \\ +\ 96.579 \\ \hline \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 48.303 \\ +\ \ 166 \\ +\ \ \ 91 \\ +\ 125.844 \\ \hline \end{array}$$

28. Sustituir los asteriscos por cifras, de manera que los resultados dados sean los verdaderos:

a)
$$\begin{array}{r} 12.30* \\ +\ 83.0*6 \\ +\ 56.*31 \\ +\ \ *.547 \\ \hline 160.178 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 36.*55 \\ +\ \ 9.7** \\ +\ 82.108 \\ +\ 6*.493 \\ \hline 195.787 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 2.361 \\ +\ 48.935 \\ +\ \ *.*** \\ +\ 69.204 \\ \hline 127.926 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 80.*96 \\ +\ 5*.120 \\ +\ 40.974 \\ +\ 6*.4*7 \\ \hline 239.987 \end{array}$$

29. Reconstruir las siguientes adiciones, en las que las letras representan cifras desconocidas de los sumandos y de la suma. (Cada letra representa una sola cifra en cada una de las operaciones).

a)
$$\begin{array}{r} 196a \\ +\ 24b1 \\ +\ 8c09 \\ \hline 1d607 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 3a14 \\ +\ b078 \\ +\ 15c9 \\ \hline 596d \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} a869 \\ +\ b31a \\ +\ 6cb8 \\ \hline ed559 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} aa91 \\ +\ bbb3 \\ +\ cccc \\ \hline ed721 \end{array}$$

30. Efectuar horizontal y verticalmente las siguientes sumas, y *cuadrar* luego los resultados. (Esto último quiere decir que los totales puestos en *a, b* y *c* y los totales puestos en *d, e, f* y *g*, deben sumar lo mismo en *T*).

$$\begin{array}{rrrrr} 273 & + 629 & + 4.361 & + 9.244 & = a \\ 726 & + \ 74 & + \ 675 & + 1.584 & = b \\ 3.290 & + 498 & + 5.719 & + \ 265 & = c \\ \hline d & e & f & g & T \end{array}$$

31. Sumar los números que siguen, primero haciendo una sola suma con todos ellos y luego mediante sumas parciales:

$$268 + 2.096 + 626 + 8.361 + 3.569 + 193 + 1.784 + 5.648$$

¿Qué propiedad de la suma se aplica en el segundo caso?

32. Escribir la suma 5 + 8 + 12 de todas las formas posibles, aplicando la propiedad conmutativa.

33. Escribir de todas las formas posibles la suma 9 + 13 + 16 + 4, aplicando la propiedad asociativa.

34. Calcular de dos maneras las siguientes sumas, primero efectuando las operaciones de los paréntesis y luego prescindiendo de los paréntesis:

a) (21 + 38 + 16) + (96 + 42) + (118 + 76) + 55

b) (19 + 71 + 63) + (49 + 126 + 75) + (938 + 33) + 136

35. Calcular la suma de los 30 primeros números naturales.

36. Calcular la suma de los 20 primeros números impares.

37. La suma de cuatro números es 19.203. Si al primero se le añaden 59 unidades, al segundo 92, al tercero 125 y al cuarto 371, ¿cuál será la nueva suma?

4. La sustracción

21. Definiciones. — De una estantería de la biblioteca en la que había 12 libros se han sacado 5. ¿Cuántos quedan?

Mentalmente, hallamos que aún quedan 7 libros. La operación que hemos efectuado se llama *resta* o *sustracción,* y se indica así:

$$12 - 5 = 7$$

El número 12 se denomina *minuendo;* el 5, *sustraendo,* y el 7, *diferencia* entre 12 y 5. Esta última, la diferencia, es el número que sumado con 5 da 12.

> **Diferencia entre dos números es el número que se ha de sumar al menor para obtener el mayor.**
>
> **Sustracción es la operación inversa de la adición; su objeto es hallar uno de los sumandos de una suma cuando se conoce ésta y el otro sumando.**

La suma dada se llama *minuendo;* el sumando conocido, *sustraendo,* y el resultado, *resto, exceso* o *diferencia.*

La sustracción se indica escribiendo el minuendo y luego el sustraendo separados por el signo $-$, que se lee *menos.*

Si representamos por m al minuendo, por s al sustraendo y por d a la diferencia, tendremos según la definición:

$$m - s = d \quad \text{o bien} \quad s + d = m$$

22. Propiedades de la sustracción. — I. *La sustracción de números naturales no siempre es posible.* Para que pueda efectuarse es necesario que el minuendo sea igual o mayor que el sustraendo.

En el caso de que el minuendo sea igual al sustraendo, la diferencia es cero:

$$\text{si } m = s \quad \text{será} \quad m - s = 0$$

II. *La sustracción no es operación conmutativa;* es decir, no puede cambiarse el minuendo por el sustraendo.

III. *Si se aumenta el minuendo y el sustraendo en un mismo número, la diferencia no varía.*

Por ejemplo, si Pedro tiene 24 pesetas y Juan 15, es evidente que la diferencia de dinero no varía si damos a cada uno 5 pesetas.

23. **Práctica de la sustracción.** — Si el minuendo y el sustraendo son números pequeños, la diferencia se halla fácilmente.

Consideremos ahora un ejemplo con números cualesquiera y analicemos la regla para restar que ya conocemos. Sea la sustracción

$$27.534 - 5.680$$

Observemos que se han restado entre sí las unidades simples, las decenas, las centenas, etc. En las decenas, como 3 es menor que 8, hemos añadido a la cifra del minuendo 10 decenas = 1 centena, y hemos dicho: de 8 a 13 van 5; para que la diferencia no varíe hemos añadido luego una centena al sustraendo, diciendo así: llevo una, 6 y 1, 7, etc.

$$\begin{array}{r} 27534 \\ -\ 5680 \\ \hline 21854 \end{array}$$

Enuncie el alumno la regla completa para restar.

24. **Prueba de la sustracción.** — Para comprobar si una sustracción está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia. El resultado ha de ser igual al minuendo.

CÁLCULO MENTAL

1. *Retrocediendo, contar de* 4 *en* 4 *a partir de* 100, 99, 98 *y* 97.

2. *Retrocediendo, contar de* 7 *en* 7 *a partir de* 105, 104, 103 *y* 102.

3. *Efectuar las siguientes sustracciones:*

a)	21 − 10	*c)*	56 − 30	*e)*	70 − 26	*g)*	28 − 17
b)	39 − 20	*d)*	74 − 40	*f)*	80 − 61	*h)*	52 − 38

4. *Hallar el valor de* x *en las siguientes igualdades:*

$16 - x = 5$; $\quad 21 - x = 12$; $\quad 70 - x = 34$; $\quad x - 23 = 45$

5. *Hallar lo que falta a los números siguientes para valer* 100:

37; 48; 54; 83; 71; 62; 17; 22

EJERCICIOS

38. Efectuar las siguientes sustracciones:

4.020 − 984	503.884 − 63.405	701.096 − 128.809
72.001 − 8.609	293.109 − 732	91.114.443 − 70.009.379

39. Reconstruir las siguientes sustracciones:

$abcd$	$35a1$	$a95b$	$2abcd$
$-\ 4096$	$-\ 1b2c$	$-\ 14c2$	$-\ bcd1$
2175	1812	$2d84$	17788

40. Hallar el número que sumado con 991 dé 1.093.

41. Después de hacer una suma de dos sumandos, cuyo resultado fue de 3.996, cayó una mancha y sólo puede leerse uno de los sumandos, que es 795. Hallar el otro.

42. América fue descubierta en 1492. ¿Cuántos años han transcurrido hasta 1960?

43. Tres obreros albañiles cobraron en total 9.238 ptas. por haber realizado un trabajo. El maestro albañil recibe 4.350 ptas. y el oficial 3.115 ptas. ¿Cuánto cobrará el peón?

44. El primer billete expedido hoy en un tranvía lleva el número 27.804, y el último, el 29.460. ¿Cuántos billetes se han despachado?

45. Una persona nacida en 1896 murió en 1959. ¿Qué edad tenía al fallecer?

46. Un comerciante ha entregado 15 billetes de mil pesetas para pagar dos facturas, de 8.367 y 6.194 ptas. ¿Qué cantidad le será devuelta?

47. La suma de tres números es 27.471. Los dos primeros suman 20.567 y el segundo es 12.475. Hallar los tres sumandos.

48. Un tonel contiene 250 litros de vino y otro 178. ¿Cuántos litros habré de pasar del primero al segundo para que ambos queden con el mismo número de litros?

49. Un camión vacío pesa 4.000 Kg y cargado de carbón, 11.346 Kg. ¿Cuál es el peso de la carga?

50. Cuatro números suman 4.122. El primero de ellos es 717 y cada uno de los dos siguientes se obtiene sumando 324 al que le precede. Se desea hallar el cuarto sumando.

51. Al intercalar un cero entre dos cifras del número 8.341, pueden resultar tres números diferentes. Averiguar cuáles son esos números, su suma y la diferencia entre el mayor y el menor.

52. La suma de cinco números es 77.609. El primero de ellos es 17.263, y cada uno de los tres siguientes se obtiene restando 801 al que le precede. Hállese el quinto número.

5. Sumas y diferencias combinadas

25. Sumas y diferencias combinadas. — Un muchacho tiene 50 cromos al comenzar un juego; luego gana 9, pierde 5, pierde otra vez 6, gana 7 y vuelve a ganar 3. ¿Cuántos cromos tiene ahora?

Las incidencias del juego pueden expresarse de este modo:

$$50 + 9 - 5 - 6 + 7 + 3$$

Tenemos aquí un conjunto de números ligados por los signos + y −. Para obtener el resultado, está claro que podemos sumar por una parte todos los números que llevan el signo + (incluído el primero, que no tiene signo, pero es como si llevase el +) y por otra todos los que tienen el signo −. Después se halla la diferencia de las dos sumas. Es decir, tendremos:

$$50 + 9 + 7 + 3 = 69; \quad 5 + 6 = 11; \quad 69 - 11 = 58$$

o bien, expresando esto con paréntesis:

$$(50+9+7+3) - (5+6) = 69 - 11 = 58$$

Para hallar el resultado de una serie de sumas y restas combinadas se suman los sumandos por un lado y los sustraendos por otro y luego se restan estas dos sumas.

26. Alteración de la diferencia al variar el minuendo, o el sustraendo o ambos. — Supongamos que Javier tiene 27 pesetas y Antonio 12. Si al primero le dan 5 pesetas, es evidente que la diferencia ha aumentado en este número. Si, por el contrario, es Antonio el que ha recibido las 5 pesetas, la diferencia habrá disminuído en dicho número. Finalmente, si suponemos que tanto Javier como Antonio recibieron un regalo de 5 pesetas, la diferencia no habrá variado.

Todo esto podemos representarlo así:

$$27 - 12 = 15 \begin{cases} (27+5) - 12 = 20 \\ 27 - (12+5) = 10 \\ (27+5) - (12+5) = 15 \end{cases}$$

Estos ejemplos y otros análogos que podríamos poner nos permiten enunciar:

Si se aumenta o disminuye el minuendo en un número, la diferencia aumenta o disminuye en el mismo número.

Si se aumenta o disminuye el sustraendo en un número, la diferencia disminuye o aumenta en el mismo número.

Si se aumentan o disminuyen el minuendo y el sustraendo en un mismo número, la diferencia no varía.

27. Adición y sustracción con sumas y diferencias indicadas. Supresión e introducción de paréntesis. — Podemos considerar adiciones o sustracciones cuyos datos estén formados por sumas y diferencias indicadas. Esta clase de operaciones se llaman *compuestas*. Por ejemplo:

$$(65-7+12-4) + (20-8+5)$$
$$(48-10+3) - (35-26+1)$$

Para calcular estas operaciones, podemos hallar el resultado del primer paréntesis, después el del segundo y finalmente sumar o restar, según el caso, los números obtenidos. Sin embargo, muchas veces no conviene, o no interesa, efectuar previamente las operaciones encerradas en un paréntesis, sino que es preferible hallar una expresión equivalente, suprimiendo el paréntesis. Para ello, se aplican las reglas siguientes, fáciles de justificar:

1) **Todo paréntesis precedido del signo + puede suprimirse.**
2) **Para suprimir un paréntesis precedido del signo − se han de cambiar los signos de todos los números encerrados en él.**

Aplicando estas reglas a los ejemplos anteriores, resulta:

$$65 - 7 + 12 - 4 + 20 - 8 + 5$$
$$48 - 10 + 3 - 35 + 26 - 1$$

Compruebe el alumno que los resultados coinciden operando de este modo y como antes se indicó.

Según lo anteriormente dicho, podemos escribir:

$$65 - 7 + 12 - 4 + 20 - 8 + 5 = (65-7+12-4) + (20-8+5)$$
$$48 - 10 + 3 - 35 + 26 - 1 = (48-10+3) - (35-26+1)$$

Estas igualdades justifican las siguientes reglas:

1) **Se pueden encerrar en un paréntesis precedido del signo + varios números ligados con los signos más o menos, con tal de que se conserven los signos de dichos números.**

2) **Se pueden encerrar en un paréntesis precedido del signo − varios números ligados con los signos más o menos, con tal de que se cambien los signos de dichos números.**

EJERCICIOS

53. Calcular las siguientes expresiones:

a) $756 - 129 + 324 - 448$; *b)* $900 - 74 - 529 + 96 - 18$;

c) $8.324 - 4.576 + 37.870 + 45.008 - 2.540 + 2.641.492$

54. En una diferencia se ha sumado 8 al minuendo. ¿Qué alteración experimenta dicha diferencia? Ídem si se suma 4 al sustraendo. Ídem si se resta 5 al sustraendo. Ídem si se resta 9 al minuendo. Ídem si se suma 6 al minuendo y al sustraendo. Ídem si se resta 12 al minuendo y al sustraendo.

55. Calcular de dos maneras el resultado de las operaciones siguientes:

a) $4.326 - (781+320-489)$ *c)* $2.094 - (89-161+509-752)$

b) $9.604 - (2.386-531-99)$ *d)* $(892-34+1.024) - 945$

e) $(344-220-689+3.405) + (530+1.118-4.083)$

f) $(8.212-3.026+185) - (639-235+166-444)$

56. Un tren sale de la estación *A* con 284 viajeros. En *B* bajan 30 y suben 48; en *C* bajan 17 y suben 9; en *D* bajan 23 y suben 56. ¿Cuántos viajeros quedan en el tren? (Indíquese la operación compuesta que ha de efectuarse).

57. En otra ocasión, el mismo tren llegó a *D* con 170 viajeros. En *C* bajaron 35 y subieron 12; y en *B* bajaron 29 y subieron 18. ¿Con cuántos viajeros partió de *A* el tren? (Indicar la operación compuesta).

58. Si *a* y *b* representan dos números, hallar los resultados de $(a+b) + (a-b)$ y $(a+b) - (a-b)$. Dése luego una regla general para hallar dos números conocidas su suma y su diferencia.

59. Aplicando la regla deducida en el ejercicio anterior, resolver el siguiente problema: Un balón con su cámara vale 225 pesetas. Si el balón vale 181 pesetas más que la cámara, ¿cuánto vale el balón y cuánto la cámara?

6. La multiplicación

28. Definiciones. — En muchas ocasiones se presentan sumas con todos los sumandos iguales.

EJEMPLOS: 1.° ¿Cuánto gana un obrero a la semana si su jornal es de 120 pesetas?

Gana: $120 + 120 + 120 + 120 + 120 + 120 + 120 = 840$ ptas.

2.° ¿Cuántos kilómetros recorre un tren en 5 horas si cada hora recorre 70 kilómetros?

Recorre: $70 + 70 + 70 + 70 + 70 = 350$ Km.

3.° ¿Cuánto costarán 4 kilogramos de azúcar si el precio del kilogramo es de 15 pesetas?

Costarán: $15 + 15 + 15 + 15 = 60$ ptas.

Estas adiciones particulares, cuando se efectúan de una manera abreviada, se llaman *multiplicaciones*. El sumando repetido recibe el nombre de *multiplicando*, y el número de sumandos, *multiplicador*.

La operación se indica escribiendo el multiplicando y después el multlipicador, separados por el signo × (multiplicado por) o por un punto. Así, para las operaciones anteriores, escribiremos:

$120 \times 7 = 840$ o también $120 \cdot 7 = 840$
$70 \times 5 = 350$ o también $70 \cdot 5 = 350$
$15 \times 4 = 60$ o también $15 \cdot 4 = 60$

Multiplicación de dos números naturales es la operación que tiene por objeto hallar abreviadamente la suma de tantos sumandos iguales al primero (multiplicando) como unidades tiene el segundo (multiplicador).

El resultado de multiplicar un número por otro se llama *producto.* El multiplicando y el multiplicador reciben también el nombre de *factores* del producto.

29. Multiplicación de números concretos. — En una adición, el resultado es de la misma especie que los sumandos, y para indicar cuántos de éstos hay lo hacemos por medio de un número abstracto. Por tanto, según la definición dada anteriormente, diremos:

> **En toda multiplicación, el producto es de igual especie que el multiplicando, y el multiplicador es siempre un número abstracto.**

EJEMPLO: ¿Cuántos litros caben en 5 cubas iguales, si la capacidad de una de ellas es de 40 litros?

Solución: $40 \text{ litros} \times 5 = 200 \text{ litros}$

30. Propiedad conmutativa del producto de dos factores. — Sea el cuadro siguiente formado por puntos:

Contados horizontalmente, vemos que resultan $5 + 5 + 5$ puntos, y en sentido vertical, $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ puntos. Como, evidentemente, el número de puntos es único, cualquiera que sea el modo de contarlos, se tiene:

$$5 + 5 + 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

o lo que es igual · $5 \times 3 = 3 \times 5$

Es decir:

> **El orden de los factores no altera el valor del producto.**

31. Multiplicador cero y multiplicador 1. — La definición de producto cuando el multiplicador es cero, o igual a la unidad, no puede aplicarse, porque para que haya suma tiene que haber por lo menos dos sumandos. Para evitar esta excepción, se admiten los siguientes convenios:

El producto de un número por cero es cero.
El producto de un número por 1 es el mismo número.

Por ejemplo: $5 \times 0 = 0$; $8 \times 1 = 8$

Admitido lo anterior, la propiedad conmutativa es cierta también para estos casos particulares; es decir, se verifica:

$$5 \times 0 = 0 \times 5; \qquad 8 \times 1 = 1 \times 8$$

32. Propiedad distributiva de la multiplicación. — 1) Tratemos de efectuar la operación $(5+7) \times 3$. Podríamos hallar previamente el valor del paréntesis y luego multiplicar por 3; pero veamos de hacerlo de otro modo.

De acuerdo con la definición de multiplicación, se tiene:

$$(5+7) \times 3 = (5+7) + (5+7) + (5+7) =$$
$$= (5+5+5) + (7+7+7) = 5 \cdot 3 + 7 \cdot 3$$

En general, podemos enunciar:

Para multiplicar una suma indicada por un número se multiplica cada uno de los sumandos por dicho número y se suman los resultados.

Esta es la *propiedad distributiva* de la multiplicación respecto de la adición.

2) Sea ahora la multiplicación $(9-3) \times 4$. Como en el caso anterior, podríamos hallar primero la diferencia $9 - 3$ y luego multiplicar el resultado, 6, por 4; pero razonemos de otro modo.

Según la definición de multiplicación, y recordando lo dicho sobre la supresión e introducción de paréntesis (núm. 27), resulta:

$$(9-3) \times 4 = (9-3) + (9-3) + (9-3) + (9-3) =$$
$$= 9 + 9 + 9 + 9 - 3 - 3 - 3 - 3 =$$
$$= (9+9+9+9) - (3+3+3+3) = 9 \cdot 4 - 3 \cdot 4$$

Para multiplicar una diferencia indicada por un número se multiplican el minuendo y el sustraendo por dicho número y se restan los resultados.

Como se ve, la multiplicación es también distributiva respecto de la sustracción.

Si hacemos la aplicación combinada de la propiedad distributiva respecto de la adición y de la sustracción, podemos escribir, por ejemplo:

$$(12-5+3-2-4+8) \times 7 = 12 \cdot 7 - 5 \cdot 7 + 3 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 4 \cdot 7 + 8 \cdot 7$$

33. **Práctica de la multiplicación.** — Las reglas para practicar la multiplicación, que ya conocemos desde la Enseñanza Primaria, tienen por objeto hallar el producto sin necesidad de efectuar la suma de tantos sumandos iguales a uno de los factores como indica el otro.

I. PRODUCTO DE DOS NÚMEROS DE UNA SOLA CIFRA. Deben saberse de memoria los productos obtenidos al multiplicar dos números menores que 10. Dichos productos se encuentran en la siguiente tabla de multiplicar, llamada también tabla de Pitágoras (*):

TABLA DE MULTIPLICAR O TABLA DE PITÁGORAS

1	2	3	4	5	**6**	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	**48**	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Esta tabla se forma como sigue: La primera fila consta de los nueve primeros números; la segunda fila se obtiene sumando consigo mismo cada uno de los números de la primera; las restantes filas se hallan sumando cada número de la anterior con el correspondiente de la primera.

Para hallar el producto de dos números, se lee uno de ellos en la primera fila y el otro en la primera columna; el producto se encontrará en el cruce de las dos líneas. (Trate el alumno de justificar el manejo de la tabla).

(*) Filósofo y matemático griego del siglo VI antes de J. C.

II. PRODUCTO DE UN NÚMERO DE VARIAS CIFRAS POR OTRO DE UNA SOLA. Efectuar, por ejemplo, la multiplicación 6.823 × 7.

Hemos multiplicado cada una de las cifras del multiplicando por el multiplicador, comenzando por la derecha, y de cada uno de los productos parciales obtenidos hemos escrito solamente la cifra de las unidades, reservando la de las decenas para sumarla al producto siguiente, excepto el último producto, que se ha escrito tal como ha resultado. Obsérvese que lo que hemos hecho no es sino aplicar la propiedad distributiva a la multiplicación

```
  6823
   × 7
 47761
```

(6 millares + 8 centenas + 2 decenas + 3 unidades) × 7

III. PRODUCTO DE DOS NÚMEROS CUALESQUIERA. Sea, por ejemplo, la multiplicación 3.265 × 847.

Al efectuar la operación tal como estamos acostumbrados, no hemos hecho sino multiplicar el multiplicador 3.265 por los diversos órdenes de que se compone el multiplicador, es decir, por la suma

(7 unidades + 4 decenas + 8 centenas).

```
   3265
  × 847
  22855
 13060
26120
2765455
```

El producto 3.265 × 7 son unidades simples; el producto 3.265 × 4 son decenas, y el producto 3.265 × 8, centenas. Por la disposición de estos productos parciales, de modo que la primera cifra de la derecha de cada uno caiga debajo de la cifra del multiplicador que lo ha originado, indicamos ya el orden de sus unidades. Sólo nos queda sumar dichos productos parciales para obtener el producto total.

OBSERVACIONES. — 1.ª Se facilita la operación tomando como multiplicador el número que tenga menos cifras.

2.ª Si entre las cifras del multiplicando hay ceros intercalados se prescinde de ellos en la multiplicación, ya que darían filas de ceros como productos parciales, pero ha de tenerse en cuenta para las cifras restantes la regla de escribir la primera cifra de cada producto parcial debajo de la cifra que ha servido de multiplicador. Véase el ejemplo del margen.

```
   8352
  × 2007
  58464
16704
16762464
```

34. Multiplicación por la unidad seguida de ceros. — Sea, por ejemplo, 258 × 100. Se tiene:

$$258 \times 100 = 258 \text{ centenas} = 25.800$$

En general, diremos:

> **Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se colocan a la derecha del número tantos ceros como sigan a la unidad.**

35. Prueba de la multiplicación. — Se basa en la propiedad conmutativa, y consiste en repetir la operación cambiando el orden de los factores. El resultado ha de ser el mismo en ambos casos.

36. Producto de varios factores. — Tratemos de resolver el siguiente problema: ¿Cuántas pesetas se necesitan para pagar a 17 obreros que han trabajado 8 horas diarias durante 14 días, si se les paga a razón de 12 pesetas la hora?

Se tiene:

Pesetas ganadas por los 17 obreros

1.° En una hora = 12 × 17
2.° En un día = 12 × 17 × 8
3.° En catorce días = 12 × 17 × 8 × 14

Este producto de cuatro factores lo obtendremos así:

12 × 17 = 204; 204 × 8 = 1.632; 1.632 × 14 = 22.848

En general, diremos:

> **Producto de varios factores es el número que se obtiene multiplicando el primer factor por el segundo, el resultado por el tercero, y así sucesivamente hasta llegar al último.**

37. Propiedades del producto de varios factores. — Fácilmente pueden comprobarse las siguientes propiedades del producto de varios factores:

1) CONMUTATIVA. **Si se altera el orden de los factores, el valor del producto no varía.**
2) ASOCIATIVA. **En un producto de varios factores se pueden sustituir dos o más factores por su producto efectuado.**
3) DISOCIATIVA. **En un producto de varios factores se puede descomponer un factor en otros varios.**

EJEMPLOS. — Presentamos uno para cada propiedad:

1) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = \ldots$ (pueden formarse hasta 24 ordenaciones distintas; todas ellas dan el mismo producto).

2) $6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 7 = (6 \cdot 8) \times (5 \cdot 7) = 48 \cdot 35$

3) $2 \cdot 5 \cdot 21 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$

38. Producto de números terminados en ceros. — Sea, por ejemplo, efectuar la multiplicación 27.200×196.000.

Haciendo uso de las propiedades anteriores, tendremos:

$$27.200 \times 196.000 = 272 \times 100 \times 196 \times 1.000 =$$
$$= 272 \times 196 \times 100 \times 1.000 = 53.312 \times 100.000 = 5.331.200.000$$

Este resultado justifica la siguiente regla:

Para multiplicar números terminados en ceros se efectúa el producto prescindiendo de los ceros y se añaden luego al resultado tantos ceros como sigan a los factores.

39. Multiplicación de productos. — Como consecuencia de las propiedades antes enunciadas, podemos dar las siguientes reglas:

1) **Para multiplicar un producto indicado por un número basta multiplicar uno de los factores por dicho número.**
2) **Para multiplicar dos o más productos indicados se forma un solo producto con los factores de todos los productos.**

EJEMPLOS:

1) $(4 \cdot 7 \cdot 5) \times 3 = 12 \cdot 7 \cdot 5$

2) $(3 \cdot 5 \cdot 8) \times (4 \cdot 7 \cdot 6) \times (9 \cdot 2) = 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 2$

CÁLCULO MENTAL

1. *Efectuar mentalmente las siguientes multiplicaciones:*

$50 \cdot 8$	$70 \cdot 6$	$200 \cdot 7$	$3000 \cdot 6$
$90 \cdot 40$	$60 \cdot 30$	$500 \cdot 90$	$4000 \cdot 70$
$12 \cdot 6$	$14 \cdot 8$	$8 \cdot 15$	$4 \cdot 125$

2. *¿Cuál es el duplo de* 32, 84, 108, 221, 743?

3. *Hallar mentalmente el triplo de* 17, 26, 85, 325 *y* 1610.

4. *Contestar con rapidez:*

$53 \times 100 =$; $39 \times 1000 =$; $104 \times 100 =$; $111 \times 10.000 =$

5. *Completar las siguientes igualdades:*

$7 \cdot 4 + 3 =$; $7 \times (4+3) =$; $8 + 2 \cdot 6 =$; $(8+2) \times 6 =$

6. *Completar las siguientes igualdades:*

$8 \cdot 9 - 5 =$; $8 \times (9-5) =$; $17 - 4 \cdot 3 =$; $(17-4) \times 3 =$

7. *Observando que* $2 \cdot 5 = 10$ *y* $4 \cdot 25 = 100$, *calcular rápidamente los productos:* $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 25$ *y* $6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 5$.

EJERCICIOS

60. Calcular la suma de 856 sumandos, de los cuales 298 son iguales a 174, otros 325 iguales a 463, y los restantes iguales a 804.

Efectuar las multiplicaciones siguientes:

61. 439×162; 8.349×563; 9.235×708

62. 674×463; 7.903×405; 16.003×2.900

63. 956×111; 32.094×107; 8.732×9.999

64. $6.000.059 \times 43.006$; $27.818.456 \times 503.009$; $34.798.000 \times 62.500$

65. Reconstruir las siguientes multiplicaciones, en las que cada x es una cifra:

834	56xx	198	314
x	9	xx	xx
5838	xxx43	1782	xxxx
		198	xxxx
		3762	xxx58

66. Efectuar las operaciones siguientes de dos maneras: 1.º, calculando previamente los paréntesis; 2.º, aplicando la propiedad distributiva:

$(9+11+5) \times 8$; $(12+7-15) \times 16$; $(13-6-9+17) \times 500$

67. Se han comprado 9 kilos de arroz a 8 pesetas kilo y 9 litros de aceite a 23 pesetas litro. Hallar el coste total de dos maneras: 1.º, calculando el coste de cada cosa; 2.º, aplicando la propiedad distributiva.

68. Calcular el número de baldosas que tiene el piso de una habitación, si se sabe que hay 35 filas y cada fila consta de 47 baldosas.

69. Un comerciante compró 38 docenas de huevos a 16 ptas. la docena, y los ha vendido a 2 ptas. huevo. ¿Cuánto ha ganado en la venta?

70. Un individuo compró un traje por 370 duros con el importe de la venta de 352 Kg de arroz. Si el arroz lo vendió a 8 ptas. el Kg, ¿cuántas pesetas le sobraron?

71. Un pinar tiene 134 hileras y cada hilera consta de 215 pinos. Si cada pino tiene por término medio 3 metros cúbicos de madera y el metro cúbico se vende a 3.850 ptas., ¿a cuánto ascenderá el importe de la venta de todos los árboles?

72. ¿Qué variación experimenta el producto 17×15 si aumentamos el multiplicando en 12 unidades? ¿Y si aumentamos el multiplicador en 12 unidades? (Aplicar la propiedad distributiva.)

73. Aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación al problema siguiente: Un obrero ha trabajado 4 días; el primero trabajó 9 horas, el segundo 7 horas, el tercero 8 horas y el cuarto 10 horas. ¿Cuánto cobrará en total dicho obrero si le pagan a razón de 12 ptas. la hora?

74. Al multiplicar un número por 11, su valor primitivo ha aumentado en 830 unidades. ¿Cuál es dicho número?

[Obsérvese que, por ejemplo, $42 \times 11 = 42 \times (10+1) = 420 + 42$].

75 Teniendo en cuenta que un número formado por nueves es igual a la unidad seguida de ceros menos una unidad (ejemplo: $999 = 1000 - 1$), deducir una regla abreviada para multiplicar un número por otro formado por nueves.

76. ¿Qué variación experimenta el producto 318×46 cuando multiplicamos por 13 a uno de los factores? ¿Y cuando multiplicamos por 13 a los dos factores?

77. Efectuar los productos siguientes:

$320 \cdot 40 \cdot 15$; $769 \cdot 482 \cdot 89$; $(8 \cdot 9 \cdot 12) \times 6$; $(42 \cdot 3 \cdot 5) \times (7 \cdot 9)$

78. ¿Cómo aplicaremos las propiedades conmutativa y asociativa para calcular lo más rápidamente posible el producto $4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 25$?

79. Si al aumentar un factor en 9, el producto aumenta en 207, ¿cuál será el otro factor? Justificar la contestación.

7. La división

40. División exacta. — Hemos visto cómo la multiplicación resuelve el problema de hallar un número formado por varias partes o sumandos iguales. La operación que ahora estudiamos trata de resolver el problema inverso, es decir, dado un número, descomponerlo en partes o sumandos iguales; o dicho más concretamente, dado el producto de dos números y uno de ellos, hallar el otro.

EJEMPLOS: 1.° ¿Cuántas veces el número 63 contiene al 7?

2.° Repartir 48 cromos entre 6 niños.

3.° Hacer el número 120 diez veces menor.

4.° ¿Cuál es el precio del kilogramo de azúcar si por 4 kilogramos se han pagado 60 pesetas?

5.° ¿Cuántos kilómetros recorre un tren en una hora si en 5 horas recorre 350 kilómetros?

En todos estos ejemplos conocemos el producto de dos factores (63, 48, 120, 60 y 350) y un factor (7, 6, 10, 4 y 5, respectivamente) y debemos hallar el otro. La operación que para ello hemos de efectuar se llama *división,* y es, por tanto, inversa de la multiplicación.

División exacta es la operación que tiene por objeto, dado el producto de dos números y uno de ellos, hallar el otro.

El producto dado se llama *dividendo;* el factor conocido, *divisor,* y el resultado o factor que se busca, *cociente.*

Cociente exacto de dos números llamados dividendo y divisor es el número que multiplicado por el divisor da un producto igual al dividendo.

Para indicar la división se emplea el signo :, que se lee *dividido por* y se coloca entre el dividendo y el divisor. Así, al resolver los ejemplos anteriores, escribiremos las siguientes igualdades:

$$63 : 7 = 9; \quad 48 : 6 = 8; \quad 120 : 10 = 12; \quad 60 : 4 = 15; \quad 350 : 5 = 70$$

Si el dividendo y el divisor son números cualesquiera, dados caprichosamente, puede ocurrir que la división exacta sea imposible. Así, por ejemplo, no hay ningún número natural que multiplicado por 6 sea igual a 40.

Cuando la división exacta es posible, se dice que el dividendo es *divisible* por el divisor, o, también, que el dividendo es *múltiplo* del divisor.

Si llamamos D al dividendo, d al divisor y c al cociente, en la división exacta se verifica la *igualdad fundamental*

$$\boxed{D = d \cdot c}$$

41. Propiedades de la división exacta. — I. *Si el dividendo y el divisor son iguales, el cociente es la unidad.* Así, $7 : 7 = 1$.

II. *Si el divisor es igual a la unidad, el cociente es igual al dividendo.* Ejemplo: $12 : 1 = 12$.

III. *El divisor es igual al dividendo dividido por el cociente.*

De $60 = 15 \times 4$ se deduce indistintamente $\begin{cases} 60 : 15 = 4 \\ 60 : 4 = 15 \end{cases}$

IV. *Si se multiplica (o divide) el dividendo por un número, el cociente queda multiplicado (o dividido) por dicho número.*

Ejemplo:

$$24 : 6 = 4 \begin{cases} (24 \cdot 2) : 6 = 8 = 4 \cdot 2 \\ (24 : 2) : 6 = 2 = 4 : 2 \end{cases}$$

V. *Si se multiplica (o divide) el divisor por un número, el cociente queda dividido (o multiplicado) por dicho número.*

Ejemplo:

$$54 : 9 = 6 \begin{cases} 54 : (9 \cdot 3) = 2 = 6 : 3 \\ 54 : (9 : 3) = 18 = 6 \cdot 3 \end{cases}$$

VI. **Si se multiplica (o divide) el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía.**

Esta propiedad es consecuencia de las dos anteriores, ya que, en efecto, al multiplicar o dividir por el mismo número al dividendo y al divisor se producen dos alteraciones en el cociente cuyos efectos se destruyen.

42. División inexacta o entera. — Cuando el dividendo no es divisible por el divisor, es decir, cuando no hay ningún número natural que multiplicado por el divisor dé el dividendo, la división es *inexacta.*

No obstante, en este caso, podemos hallar dos números naturales consecutivos que multiplicados por el divisor produzcan dos números entre los cuales esté comprendido el dividendo. Así, en la división 38 : 7 vemos que 5 multiplicado por 7 da un producto menor que 38; y si multiplicamos 6 por 7, obtenemos un número mayor que 38. Podemos expresar esto de la siguiente manera:

$$7 \cdot 5 < 38 < 7 \cdot 6$$

Los números 5 y 6 se llaman, respectivamente, *cociente entero por defecto* y *cociente entero por exceso* de la división 38 : 7.

Cociente entero por defecto es el mayor de los números que multiplicados por el divisor dan un producto que puede ser restado del dividendo.

Resto por defecto es la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente entero por defecto.

Llamando D al dividendo, d al divisor, c al cociente por defecto y r al resto, se tiene la siguiente relación fundamental:

$$D = d \cdot c + r \quad \text{siendo} \quad r < d$$

El dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resto.
El resto es inferior al divisor.

43. Cociente y resto por exceso. — *Cociente entero por exceso es el menor de los números que multiplicados por el divisor dan un producto mayor que el dividendo.* Si c es el cociente por defecto, el cociente por exceso será $c + 1$.

Resto por exceso es la diferencia entre el producto del divisor por el cociente por exceso y el dividendo. Al resto por exceso lo representamos por r'.

Según lo que llevamos dicho, podemos escribir:

$$d \cdot c < D < d \cdot (c+1)$$
$$r + r' = d$$

Cuando se trate de divisiones inexactas, al hablar simplemente de cociente y de resto se sobrentiende que nos referimos al cociente y al resto por defecto.

44. **Número de cifras del cociente.** — Sin efectuar la división podemos averiguar cuántas cifras ha de tener el cociente. Sea, por ejemplo, la división 53.287 : 69. Como se verifica que

$$69 \cdot 100 < 53.287 < 69 \cdot 1000$$

el cociente estará comprendido entre 100 y 1000 y tendrá, por tanto, *tres* cifras. En general, diremos:

El número de cifras del cociente es igual al menor número de ceros que es preciso poner a la derecha del divisor para que resulte un número mayor que el dividendo.

EJERCICIO. — ¿Cuántas cifras tendrá el cociente de las siguientes divisiones?

8.435 : 34; 1.848.903 : 208; 270.104.009 : 73

45. **Práctica de la división.** — I. EL DIVISOR Y EL COCIENTE TIENEN UNA SOLA CIFRA. Para hallar el cociente basta saber de memoria la tabla de multiplicar, pues en ella aparecen los múltiplos del divisor.

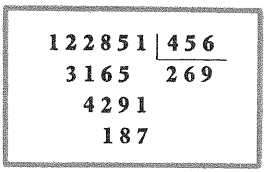
II. EL DIVISOR TIENE VARIAS CIFRAS Y EL COCIENTE UNA. Apliquemos la regla que ya nos es conocida a la división 31.769 : 4592.

Hemos dividido el número que expresa los millares del dividendo por el número que expresa los millares del divisor; pero el cociente, 7, lo hemos comprobado y hemos visto que era grande, por lo que se ha rebajado en una unidad. Para

31769	4592
4217	6

comprobar la cifra del cociente se multiplica por el divisor, y si el producto puede restarse del dividendo, la cifra es buena. La razón de haber operado así es porque los millares del dividendo (31) provienen de multiplicar los millares del divisor (4) por la cifra del cociente, más los millares que pueden resultar de multiplicar lo que queda del divisor (592) por dicho cociente. El cociente de la división es 6 y el resto 4217.

III. EL DIVISOR Y EL COCIENTE TIENEN VARIAS CIFRAS. Efectuemos la división 122.851 : 456 y analicemos luego lo hecho.



Primero hemos separado de la izquierda del dividendo las cifras justamente necesarias para formar un número mayor que el divisor. Este número (1228), que representa centenas, lo hemos dividido por el divisor aplicando la regla del caso anterior, y hemos obtenido así la cifra (2) de las centenas del cociente. Al resto (316 centenas = 3160 decenas) le hemos agregado la cifra de las decenas del dividendo (5) y el número formado (3165) lo hemos dividido por el divisor; de este modo hemos obtenido la cifra (6) de las decenas del cociente. Razonando de manera análoga se ha obtenido la cifra (9) de las unidades del cociente. El cociente es, por tanto, 269 y el resto 187.

46. Prueba de la división. — En toda división bien hecha:

1.° *El resto ha de ser menor que el divisor.*

2.° *El producto del divisor por el cociente, más el resto, ha de ser igual al dividendo.*

47. Múltiplos y divisores. — Si multiplicamos el número 4 por 2, 3, 4, 5, ..., obtenemos 8, 12, 16, 20, ... Todos estos productos se llaman *múltiplos* de 4.

> **Múltiplos de un número son los productos que se obtienen al multiplicarlo por otros números cualesquiera.**

Por ser $18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$, se verifica que

$$18 : 2 = 9, \qquad 18 : 3 = 6, \qquad 18 : 6 = 3 \quad \text{y} \quad 18 : 9 = 2$$

es decir, los números 2, 3, 6 y 9 dividen exactamente a 18; de dichos números decimos que son *divisores* de 18.

Divisores de un número son todos aquellos números que lo dividen exactamente.

Todo número es divisible por sí mismo y por la unidad. Luego todo número distinto de 1 tiene por lo menos dos divisores.

La mayor parte de los números tienen más de dos divisores. Así, 10 tiene por divisores a 1, 2, 5 y 10; los de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Los números que no tienen más que dos divisores se llaman *números primos*, y los demás, *números compuestos*.

CALCULO MENTAL

1. *Didivir por 2 los números:* 48, 56, 72, 94, 138, 266, 576, 954.
2. *Hallar la tercera parte de:* 42, 57, 69, 75, 141, 174, 231, 378.
3. *Hallar, cuando sea exacta, la mitad, el quinto, la séptima parte y la novena parte de los números:* 280, 560, 126, 81, 350, 1.800, 91, 252.
4. *Hallar mentalmente divisiones como éstas:* 926 : 7, 4.267 : 5, *etc.*
5. *Hallar mentalmente el cociente y el resto de las siguientes divisiones:*
   280 : 10, 620 : 100, 427 : 10, 3115 : 100, 19642 : 1000
6. *Calcular mentalmente 6 múltiplos de 40 y 6 divisores de 30.*

EJERCICIOS

80. Hallar los cocientes por defecto y por exceso y los respectivos restos de las divisiones que siguen; escribir luego las desigualdades correspondientes y la relación fundamental en cada caso:
   605 : 34, 4.827 : 483, 9.093 : 872, 2.054 : 394

81. Decir todos los números que divididos por 9 dan 23 como cociente por defecto. Ídem todos los números que divididos por 7 dan 16 como cociente por exceso.
   Efectuar las divisiones siguientes y comprobar el resultado:

82. 4.186 : 598
    9.840 : 1.082
    28.872 : 797

83. 429.912 : 329
    207.400 : 5.100
    18.235.000 : 324.000

84. 1.000.000 : 31.416
    5.343.289 : 763
    744.363 : 877

85. ¿Cuántas veces se puede restar el número 384 de 7.593? ¿Cuál es la última diferencia?

86. ¿Cuál es el número que multiplicado por 36 da 1.620?

87. En una división exacta, el divisor es 37.746 y el cociente 885. ¿Cuál será el dividendo?

88. Hallar el número que puede ser restado 649 veces de 288.156.

89. El producto de dos números es 459.115.550. Uno de los factores es 9.050. ¿Cuál es el otro factor?

90. En una división, el divisor es 437, el cociente 190 y el resto 158. ¿Cuál es el dividendo?

91. Al dividir 60.142 por cierto número, se halla de cociente 155 y de resto 157. ¿Cuál es el divisor?

92. Hallar el mayor número natural que al ser dividido por 124 da un cociente entero igual al resto.

93. Un avión ha recorrido 6.048 kilómetros en 8 horas. ¿Cuál ha sido la velocidad media por hora de dicho aparato durante ese tiempo?

94. Un niño ha comprado el mismo número de sellos de 70 céntimos que de 35 céntimos. Sabiendo que para pagarlos entregó 20 pesetas y le devolvieron 5 céntimos, se desea saber el número de sellos que compró de cada clase.

95. Dos piezas de tela de igual precio y distinta longitud han costado 1.680 pesetas la una y 1.400 ptas. la otra. La primera tiene 7 metros más que la segunda. Averiguar el precio del metro de tela y la longitud de las piezas.

96. Un grupo de 27 jóvenes organiza una excursión. Como 6 de ellos no disponen de dinero, los demás deciden costearles los billetes, correspondiendo a 9 pesetas cada uno. Hallar el precio del billete.

97. Nueve cajas que contienen el mismo número de botellas de licor, han costado 3.456 pesetas. Si el precio de cada botella es de 32 pesetas, ¿a cómo resultó la caja y cuántas botellas habrá en cada una?

98. Un comerciante compró una pieza de tela a 45 pesetas metro. Si hubiera pagado el metro a 48 pesetas, habría gastado 96 pesetas más. Hallar la longitud de la pieza de tela.

99. Siete toneles contienen en total 1.636 litros de vino. En seis de ellos hay el mismo número de litros y en el séptimo hay 96 litros más que en los restantes. ¿Cuántos litros hay en cada tonel?

100. La suma de tres números consecutivos es igual a 1.887. ¿Cuáles son esos números?

101. Hallar dos números cuya suma sea 3.641 y su diferencia 2.273.

102. Una persona tiene 42 años y su hijo 8. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea igual a tres veces la del hijo?

103. Considerando que la división es la operación inversa de la multiplicación, comprobar mediante un ejemplo: 1.º, que para dividir una suma por un número se divide cada sumando por dicho número; 2.º, que para dividir una diferencia por un número se divide el minuendo y el sustraendo por dicho número; 3.º, que para dividir un producto indicado por uno de sus factores basta suprimir dicho factor, y 4.º, que para dividir un producto indicado por un número basta dividir uno de los factores por dicho número.

8. Los números decimales

48. Magnitud y cantidad. — La longitud, la superficie, el peso, la capacidad, el valor de las mercancías, la velocidad, etc., son *magnitudes.*

Cantidad es un valor particular de la magnitud. Así, por ejemplo, la longitud de la mesa, la superficie de la clase, el peso de este libro, el tiempo que dura el recreo, etc., son cantidades.

49. Medición de una cantidad. — Para medir una cantidad se elige otra cantidad de la misma magnitud, a la que llamamos *unidad,* y se cuenta el número de estas unidades contenidas en aquella cantidad.

Así, por ejemplo, para medir un segmento se cuentan las veces que contiene a otro segmento tomado como unidad; para medir el peso de un cuerpo ponemos a éste en un platillo de la balanza y vemos cuántos pesos iguales a uno determinado, que adoptamos por unidad, son necesarios para restablecer el equilibrio de la balanza.

50. Unidades fraccionarias. — Al medir una cantidad puede suceder que la unidad elegida esté contenida en ella un número exacto de veces, con lo que obtendremos por medida un número natural. Pero lo más frecuente es que la cantidad que se quiere medir no contenga exactamente un determinado número de veces a la unidad. Entonces, es necesario elegir otra unidad más pequeña, la que obtendremos dividiendo a la primera en partes iguales, cada una de las cuales se llama *unidad fraccionaria.*

51. Unidades fraccionarias decimales. — Las *unidades fraccionarias decimales* resultan de dividir a la unidad en 10, 100, 1.000, 10.000, ... partes iguales. Se representan y nombran así:

0'1	0'01	0'001	0'0001	...
décima	*centésima*	*milésima*	*diezmilésima*	...

Obsérvese que para escribirlas ponemos un cero, una coma a su derecha y un 1 en el lugar que indica el número de ceros del divisor, completando con ceros los restantes lugares. Para nombrarlas se añade el sufijo *ésima* al nombre del divisor. Por ejemplo, si dividimos a la unidad en 100.000.000 de partes iguales, una de esas partes será una cienmillonésima y se representará por 0'00000001.

52. Ley de formación de las unidades fraccionarias decimales. — Por ser el divisor sucesivamente 10, 100, 1.000, ... veces mayor, las unidades fraccionarias decimales serán sucesivamente 10, 100, 1.000, ... veces menores. Es decir:

> **Cada unidad fraccionaria decimal es 10 veces menor que la que inmediatamente le precede.**
> **Diez unidades fraccionarias decimales de un orden forman una unidad fraccionaria decimal del orden inmediato superior.**

53. Fracción decimal o número decimal. — *Número decimal* o *fracción decimal* es un número cualquiera de unidades fraccionarias decimales. Ejemplo: 87 milésimas; 39451 diezmilésimas.

54. Escritura de un número decimal. — *Se escribe como si fuera un número natural y luego se separan con una coma tantas cifras como indique el orden de la última cifra decimal, supliendo con ceros a la izquierda las que falten.*

Si se ha enunciado la parte entera separada de la decimal, *se escribe la parte entera, se pone una coma a la derecha y a continuación se escribe la parte decimal.*

Ejemplos:

45 milésimas = 0'045; 18 enteros 34 diezmilésimas = 18'0034.

55. Lectura de un número decimal. — *Se enuncia primero la parte entera seguida de la palabra enteros; luego, la parte decimal como si representara un número natural, añadiendo el nombre de la unidad decimal que corresponde a la última cifra.*

Ejemplo: 520'74 = quinientos veinte enteros, setenta y cuatro centésimas.

También se puede leer un número decimal *enunciando el número natural que resulta al suprimir la coma y añadiendo el nombre de la unidad decimal que corresponde a la última cifra.*

Ejemplo: 9'0186 = noventa mil ciento ochenta y seis diezmilésimas.

56. Agregación o supresión de ceros a la derecha de un número decimal. — Si comparamos, por ejemplo, los números 2'59 y 2'5900 vemos que ambos están formados por 2 enteros, 5 décimas y 9 centésimas, sin que ninguno de los dos tenga milésimas ni diezmilésimas. En general, podemos enunciar:

Un número decimal no altera su valor al añadirle ceros a su derecha o al suprimir los ceros en que termine.

Hacemos uso de esta propiedad para escribir varios números decimales con igual número de cifras en su parte decimal, lo que equivale a referirlos todos a la misma unidad decimal o hacerlos homogéneos.

Ejemplo: los números 36'24, 9'8 y 5'2076, referidos a las diezmilésimas, se escribirán así: 36'2400, 9'8000 y 5'2076.

57. Alteraciones de un número decimal al trasladar la coma. — Consideremos el número 7'384 y traslademos la coma dos lugares hacia la derecha. Se obtiene 738'4, número éste en el que cada cifra representa unidades 100 veces mayores que su correspondiente del primero; por tanto, diremos que $738'4 = 7'384 \cdot 100$.

Sea ahora el número 62'59. Si trasladamos la coma tres lugares hacia la izquierda, obtenemos el número 0'06259, que es 1000 veces menor que el dado, puesto que al tener ambos las mismas cifras y estar escritas en el mismo orden, las del segundo representan unidades mil veces menores. Es decir, que $0'06259 = 62'59 : 1000$.

Un número decimal queda multiplicado por 10, 100, 1000, ..., cuando se corre la coma uno, dos, tres, ... lugares hacia la derecha.
Un número decimal queda dividido por 10, 100, 1000, ..., cuando se corre la coma uno, dos, tres, ... lugares hacia la izquierda.

EJERCICIOS

104. Enunciar y escribir ordenadamente todas las unidades desde la millonésima hasta el millón.

105. Escribir con cifras los números decimales siguientes:
Cuatro mil doscientas cincuenta y seis diezmilésimas. — Cuatro mil doscientos enteros, cincuenta y seis diezmilésimas. — Mil doscientos enteros, tres mil seiscientas cuatro diezmilésimas. — Diez mil ciento un enteros, dos mil trescientas una diezmilésimas. — Diez mil enteros, una cienmilésima.

106. Léanse los siguientes números decimales:
202'022; 55'505; 300'003; 0'00707; 1'00001001

107. ¿Cuántas milésimas hay en 0'58? ¿Cuántas millonésimas?

108. Referir los números decimales siguientes a las cienmilésimas:
0'0371 75'823 6'0028 146'1392 85'00476

109. Efectuar las operaciones que se indican:

$10'7 \cdot 10$	$2'467 \cdot 100$	$803'9 : 100$	$745'32 : 10.000$
$3.648 : 100$	$90 : 10.000$	$4'6 \cdot 1.000$	$0'086 \cdot 100.000$

9. Operaciones con números decimales

58. Adición. — Los números decimales se suman lo mismo que los enteros, pero antes han de referirse a la misma unidad. Esto se logra sin más que escribir los sumandos unos debajo de otros, de modo que las comas estén en columna, con lo cual, las décimas caen debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas, etc. En la suma que se obtenga se pone una coma debajo de la columna de las comas.

Sea, por ejemplo, efectuar la suma

430'7418 + 0'007 + 9'00236 + 873 + 3'14

```
430'7418
  0'007
  9'00236
873
  3'14
-----------
1315'89116
```

Todos los sumandos están referidos a las cienmilésimas; la agregación de ceros se hace mentalmente. La suma será:

131.589.116 cienmilésimas = 1315'89116

59. Sustracción. — La *diferencia* ha de ser un número que sumado con el sustraendo dé el minuendo.

Para restar números decimales tienen que referirse a la misma unidad. Esto se consigue escribiendo el sustraendo debajo del minuendo de manera que las comas estén en columna, con lo cual se corresponderán las distintas unidades. Luego se resta como si se tratara de números naturales, y en la diferencia se pone una coma debajo de la columna de las comas.

Efectuemos, por ejemplo, la sustracción

176'021 − 39'1595.

```
176'021
 39'1595
-----------
136'8615
```

El minuendo y el sustraendo están referidos a las diezmilésimas; los ceros se añaden mentalmente. La diferencia será:

1.368.615 diezmilésimas = 136'8615

60. Multiplicación. — I. PRODUCTO DE UN NÚMERO DECIMAL POR UN NÚMERO NATURAL. Ejemplo: 37'256 × 14.

Este producto equivale a 37.256 milésimas por 14. Efectuando la multiplicación, obtendremos:

$$\begin{array}{r} 37'256 \\ 14 \\ \hline 149024 \\ 37256 \\ \hline 521'584 \end{array}$$

521.584 milésimas = 521'584

Es decir: *Hemos multiplicado como si los factores fueran números naturales, y de la derecha del producto hemos separado tantas cifras decimales como tiene el número decimal.*

II. PRODUCTO DE DOS NÚMEROS DECIMALES. Sea, por ejemplo, la multiplicación 84'375 × 9'67.

$$\begin{array}{r} 84'375 \\ 9'67 \\ \hline 590625 \\ 506250 \\ 759375 \\ \hline 815'90625 \end{array}$$

Este producto equivale a 84'375 por 967 centésimas (caso anterior), y efectuando la operación se obtendría:

81.590'625 centésimas = 815'90625

En resumen: *Se ha multiplicado como si los factores fueran números naturales, y en el producto se han separado tantas cifras decimales como tienen en total los dos factores.*

61. **División.** — Las reglas para la división de números decimales se basan en la siguiente propiedad, fácil de comprobar:

> **En toda división, si se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía, pero el resto queda multiplicado por dicho número.**

En la división de decimales distinguiremos dos casos:

I. EL DIVISOR ES ENTERO. Ejemplo: Dividir 67'289 por 43.

Si tuviéramos que dividir 67.289 unidades por 43, el cociente sería 1.564 unidades y el resto 37 unidades; pero como lo que ha de dividirse por 43 son 67.289 milésimas, el cociente será 1.564 milésimas y el resto 37 milésimas.

$$\begin{array}{l|l} 67'289 & 43 \\ \cline{2-2} 242 & 1'564 \\ 278 & \\ 209 & \\ 37 & \end{array}$$

Es decir: *Hemos operado como si el dividendo fuera entero y en el cociente hemos separado tantas cifras decimales como tiene el dividendo.* (En la práctica se pone la coma en el cociente al bajar la cifra de las décimas).

Hay que tener en cuenta que el resto es del orden decimal de la última cifra bajada del dividendo.

II. EL DIVISOR ES DECIMAL. Veamos los tres ejemplos siguientes:

1.º Dividir 976 por 6'52.

$$976 \mid 6'52 \quad = \quad 97600 \mid 652 \quad = \quad \begin{array}{l|l} 97600 & 652 \\ 3240 & 149 \\ 6320 & \\ 452 & \end{array}$$

Cociente = 149; resto = 452 centésimas = 4'52

Al añadir dos ceros al dividendo y suprimir la coma del divisor, hemos multiplicado por 100 al dividendo y al divisor, con lo cual no sufre variación el cociente, pero el resto ha quedado multiplicado por 100.

2.º Dividir 2578'35 por 6'24.

$$2578'35 \mid 6'24 \quad = \quad 257835 \mid 624 \quad = \quad \begin{array}{l|l} 257835 & 624 \\ 0823 & 413 \\ 1995 & \\ 123 & \end{array}$$

Cociente = 413; resto = 123 centésimas = 1'23

3.º Dividir 28'7924 por 4'59.

$$28'7924 \mid 4'59 \quad = \quad 2879'24 \mid 459 \quad = \quad \begin{array}{l|l} 2879'24 & 459 \\ 1252 & 6'27 \\ 3344 & \\ 131 & \end{array}$$

Cociente = 6'27; resto = 131 diezmilésimas = 0'0131

Cualquiera que sea el dividendo, entero o decimal, lo que hemos hecho se reduce a *suprimir la coma del divisor y correr la coma del dividendo (o poner ceros) tantos lugares a la derecha como cifras decimales tiene el divisor;* de este modo, el caso que estamos tratando queda reducido al anterior, o a la división de números enteros.

Adviértase que el resto es del orden decimal de la última cifra bajada, respecto de la primitiva posición de la coma en el dividendo.

62. Aproximación de un cociente hasta un orden dado. — Cuando en una división inexacta se desea obtener un cociente aproximado hasta una determinada unidad decimal, *se agregan a la derecha del dividendo los ceros decimales necesarios para que el dividendo sea de la misma denominación decimal que el cociente que se quiere obtener, y luego se efectúa la división.*

Un cociente aproximado hasta las décimas, centésimas, milésimas, ... se llama también *cociente aproximado con error menor que* 0'1, 0'01, 0'001, ...

EJEMPLO 1.º — Hallar el cociente 67'3 : 41 aproximado hasta las milésimas.

Bastará añadir dos ceros al dividendo y efectuar luego la división.

$$67'3 \mid 41 \quad = \quad 67'300 \mid 41 \quad = \quad \begin{array}{l|l} 67'300 & 41 \\ 263 & 1'641 \\ 170 & \\ 060 & \\ 19 & \end{array}$$

Cociente = 1'641; resto = 19 milésimas = 0'019

EJEMPLO 2.º — Hallar el cociente 22 : 7 con error menor que 0'01.

Agregaremos dos ceros decimales al dividendo y efectuaremos la división.

$$22 \mid 7 \quad = \quad 22'00 \mid 7 \quad = \quad \begin{array}{l|l} 22'00 & 7 \\ 10 & 3'14 \\ 30 & \\ 2 & \end{array}$$

Cociente = 3'14; resto = 2 centésimas = 0'02

Cuando el divisor es un número decimal, la agregación de ceros decimales en el dividendo para obtener la aproximación deseada se hará después de transformar al divisor en entero.

EJEMPLO 3.º — Aproximar hasta las centésimas el cociente 136'4 : 4'225.

Al igualar las cifras decimales y suprimir la coma, resulta 136400 : 4225. Bastará ahora añadir dos ceros decimales al dividendo y efectuar la división.

$$136'4 \mid 4'225 \quad = \quad 136400 \mid 4225 \quad = \quad \begin{array}{l|l} 136400'00 & 4225 \\ 09650 & 32'28 \\ 12000 & \\ 35500 & \\ 1700 & \end{array}$$

Cociente = 32'28; resto = 17 cienmilésimas = 0'00017

OBSERVACIÓN. — *En la práctica, los ceros se agregan solamente a los sucesivos dividendos parciales.*

EJERCICIOS

110. Efectuar las siguientes adiciones:

3'9 + 7'081 + 0'69 + 1'4005; 4'15 + 3'375 + 0'803 + 1'7;
2'0056 + 13 + 10'01 + 248'093 + 0'798

111. Efectuar las siguientes sustracciones:

45 − 27'45; 8'653 − 7; 9'8 − 5'75; 97'63 − 63'2;
347'002 − 18'26; 16 − 9'2384; 1 − 0'735

112. Hallar el valor de las siguientes expresiones:

a = 12'248 + 9'13 − 4'63 + 0'9 − 8'25
b = 5'3 − 2'06 + 4'005 + 4'37 − 1'9
c = 9'02 + 4'5 − 0'342 − 10'081 + 0'96
d = 17'45 − 6'32 + 8'05 − 15'2
e = 836'7 − 91'063 − 101'10 − 73
f = 1'3 − 0'875 + 19 − 2'008

113. Efectuar las siguientes divisiones, expresando separadamente el cociente y el resto:

510'72 : 57	15 : 4'8	3'1416 : 0'2
24'16 : 302	381 : 1'02	145'92 : 0'6
22'5419 : 32	709 : 0'008	0'0397533 : 2'17
11866'32 : 187	6 : 0'0003	1'5 : 0'486

114. Hallar el valor de las expresiones:

a = 83 − 12'4 × 3'7
b = 9'5 × 0'4 − 2'125
c = 21'3 : 0'071 − 299
d = (3'9 × 0'06) : 0'13
e = (4'19 + 5'8 − 7'06) × 3'5
f = (3'25 − 1'6 + 11'39) : 1'304
g = (9 − 7'5 + 12'78) : 3

115. Calcular, aproximando hasta las milésimas, los cocientes:

76'2831 : 43	0'000389 : 0'061	29'08 : 0'017
37'62 : 0'54	0'19 : 3'96	0'0025 : 0'00162

116. Hallar el cociente aproximado hasta las centésimas:

8.641 :59	59.243 : 685	7 : 93	3 : 11
12 : 7	1.785 : 2.431	15 : 348	1 : 29

117. De las 1.225 ptas. que debía, he pagado primero 113'35 ptas. luego 111'65. Si lo restante he de satisfacerlo en cuatro plazos, ¿cuánto tendré que pagar cada vez?

118. He comprado un traje y un par de zapatos por 1.175'50 ptas. El traje vale 781'50 ptas. más que los zapatos. ¿Cuál es el precio de cada cosa?

119. Si gasto 101'20 ptas. diarias, al cabo de un mes me habré empeñado en 82'50 ptas. ¿Cuánto podré gastar cada día, si lo que pretendo es ahorrar 441 ptas. al mes?

120. Una persona que ha de pagar una factura dispone de 54.000 ptas. Si el importe de la factura hubiera sido tres veces mayor que el verdadero, le habrían sobrado 436'95 ptas. ¿A cuánto asciende la factura?

121. Se quieren repartir 3.800 ptas. entre dos personas, de manera que a una le corresponda el triple de la otra, y además 27'40 ptas. ¿Cuánto recibirá cada una?

122. Si quisiéramos pagar 1.479 ptas. empleando igual número de monedas de 5 ptas., 2'50 ptas. y 1 pta., ¿cuántas monedas de cada clase entregaríamos?

123. Una cuba contiene 240 litros de vino que se vende a 320 ptas. el hectolitro. ¿Cuántas botellas de 0'75 litros cada una se pueden llenar con ese vino? ¿A cómo resulta la botella de vino?

124. Una modista ha comprado una pieza de tela a 26'25 ptas. el metro. Con ella ha confeccionado 7 blusas, empleando 2'60 metros en cada una. Si al final le sobró 1'80 metros, ¿qué longitud tenía la pieza? ¿Cuánto le costó?

125. Tenemos tres cajas que contienen mercancías. La primera y la segunda pesan 76'580 Kg; la segunda y la tercera 90'751 Kg, y la primera y la tercera 86'175 Kg. ¿Cuánto pesa cada caja?

126. Un carnicero ha sacado de una oveja 9 kilogramos de carne de primera y 7 kilogramos de segunda. Sabiendo que ha vendido la carne de primera a 63'30 ptas. kilo, ¿a cómo habrá vendido la de segunda, si el total de la venta se eleva a 808'40 ptas.?

127 Un automóvil sale de una ciudad y en su recorrido desarrolla una velocidad media de 45'50 kilómetros por hora. Dos horas después parte de la misma ciudad y en la misma dirección otro automóvil cuya velocidad media es de 59,50 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo automóvil en dar alcance al primero? ¿A qué distancia del punto de partida lo encontrará?

128. Dos caminantes salen al mismo tiempo de dos pueblos, distantes entre sí 101'5 kilómetros, y van uno al encuentro de otro. Si uno de ellos anda a razón de 8 kilómetros por hora y el otro a razón de 6'5 kilómetros, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse? ¿Qué distancia habrá recorrido entonces cada uno?

129. Un albañil cobró 1.125 ptas. por cierto número de jornales. De haber trabajado 7 días más, le habrían correspondido 1.562'50 ptas. ¿Cuál es su jornal diario? ¿Cuántos días trabajó?

130. Si los ingresos diarios de una familia son 97'50 ptas. y los gastos en un mes de 30 días ascienden a 1.710 ptas. ¿cuántos días habrán de transcurrir para que, con los ahorros, pueda pagar un mueble que vale 3.523'50 ptas.?

131. Un comerciante vendió un número igual de metros de tela a 26'60 ptas. el metro, de paño a 198'50 ptas. el metro y de terciopelo a 236 ptas. el metro. Si el total de la venta ascendió a 24.438'30 ptas., ¿cuántos metros vendió de cada clase?

132. Averiguar el tiempo que tardará en llenarse un estanque de 21.955'50 litros de capacidad, sabiendo que recibe a razón de 1.560'50 litros por hora y que, a causa de una grieta, pierde 340'75 litros por hora.

10. Sistema métrico decimal. Unidades de longitud

63. Sistema de unidades. — Es el conjunto de unidades principales y derivadas elegidas para medir las cantidades.

64. Sistema métrico decimal.

> **Sistema métrico decimal es el conjunto de unidades de medida que tiene por base el metro; en él, las distintas unidades y sus respectivos múltiplos y submúltiplos se relacionan entre sí según los principios de la numeración decimal.**

65. Unidades principales. — Para medir las cantidades correspondientes a cada magnitud se ha elegido una unidad principal. Las más importantes son: el *metro* para las longitudes; el *metro cuadrado* para las superficies; el *metro cúbico* para los volúmenes; el *litro* para la capacidad; el *gramo* para los pesos, y la *peseta* para las monedas.

66. Unidades derivadas. — Para medir cantidades grandes con relación a la unidad principal se usan otras unidades que contienen a la unidad principal un determinado número de veces. De ellas decimos que son *múltiplos* de la unidad que las origina, y para designarlas se anteponen al nombre de la unidad principal los prefijos griegos: *deca,* que significa diez; *hecto,* que significa cien; *kilo,* que significa mil, y *miria,* que significa diez mil.

Cuando se trata de medir cantidades que no contienen un número exacto de veces a la unidad principal, se emplean otras unidades, cada una de las cuales es una unidad fraccionaria decimal de aquélla. Dichas unidades se denominan *submúltiplos* o *divisores* de la unidad principal, y se enuncian colocando delante del nombre de la unidad de que derivan los prefijos latinos: *deci,* que significa décima parte; *centi,* que significa centésima parte, y *mili,* que significa milésima parte.

67. Medición de segmentos. — Como ya dijimos en otro lugar, medir un segmento de recta es averiguar cuántas veces contiene a otro segmento que se toma por unidad.

Por ejemplo, la medida del segmento *AB* (fig. 1) será 6 si tomamos por unidad el segmento *u*; y si esta unidad fuera un centímetro, diríamos que la medida de *AB* es 6 centímetros.

FIG. 1

La medida de un segmento rectilíneo se llama *longitud* de dicho segmento.

68. Propiedades de las medidas. — La medida de un segmento permite compararlo con otros, así como sumar sus longitudes sin necesidad de reunirlos en uno sólo, ya que resultan evidentes estas dos afirmaciones, que pueden considerarse como *propiedades* de las medidas:

1.ª *A un segmento mayor corresponde medida mayor, y viceversa: a medida mayor corresponde un segmento de mayor longitud.*

2.ª *La medida de un segmento que sea la suma de otros varios, representa la suma de las medidas de éstos.*

69. Unidad principal de las medidas de longitud. — La unidad principal de las medidas de longitud es el *metro*. Abreviadamente se escribe *m*.

Metro-patrón es el segmento marcado sobre una regla de platino iridiado que se conserva en el Pabellón internacional de pesas y medidas de París.

Para fijar esta longitud, se midió el arco de meridiano comprendido entre Dunkerque y Barcelona (fig. 2), y del resultado obtenido se dedujo la longitud correspondiente a un cuadrante de meridiano; luego, se construyó una regla metálica, hecha con una aleación de platino e iridio, y sobre ella se señaló la longitud equivalente a la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano (fig. 3).

Por eso, también suele definirse el metro, diciendo que *es la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.*

Medidas posteriores, hechas con más precisión, demostraron que el modelo obtenido no era exactamente la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano. A pesar de esto, no se ha modificado la longitud del patrón o modelo de metro.

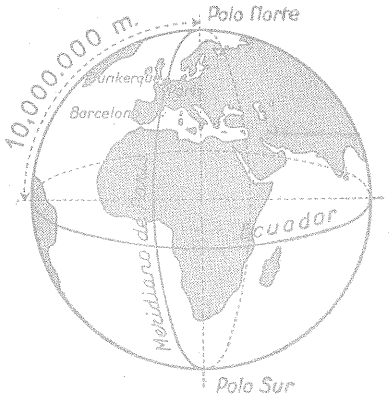


FIG. 2

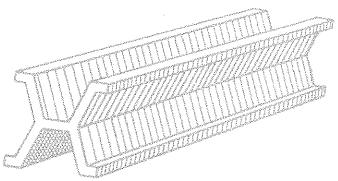


FIG. 3. — Forma del METRO PATRÓN que se conserva en el Pabellón internacional de pesas y medidas de París.

Del metro-patrón, cuya forma es la indicada en la figura 3, se hicieron copias exactas y se mandaron a los distintos países que adoptaron el sistema.

Las unidades principales de superficie, volumen, capacidad y peso han sido establecidas con relación al metro.

70. Múltiplos del metro.

Decámetro (Dm), que equivale a 10 metros.
Hectómetro (Hm), que equivale a 100 metros.
Kilómetro (Km), que equivale a 1.000 metros.
Miriámetro (Mm), que equivale a 10.000 metros.

71. Submúltiplos o divisores del metro.

Decímetro (dm), que equivale a la décima parte del metro: 1 dm = 0'1 metros.

Centímetro (cm), que equivale a la centésima parte del metro: 1 centímetro = 0'01 m.

Milímetro (mm), que equivale a la milésima parte del metro: 1 milímetro = 0'001 m.

72. Instrumentos para medir longitudes. — Los dibujantes manejan el *doble decímetro,* de madera, metal o plástico. Los comerciantes, para la

medida de telas utilizan *metros rígidos*. En muchos oficios (carpinteros, ebanistas, albañiles, etc.) se usan los metros o dobles *metros plegables* (figura 4), de madera o de metal. Los sastres y modistas se valen de metros marcados en una *cinta.*

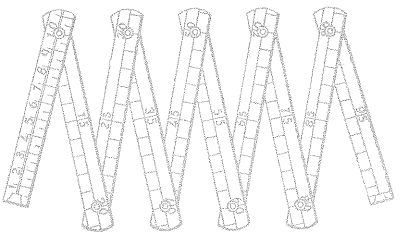


FIG. 4. — Metro plegable.

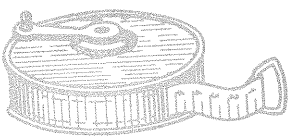


FIG. 5. — Cinta métrica.

En agrimensura, para la medición de terrenos, se emplea la *cadena de agrimensor* (fig. 6), que es el decámetro. Cuando el terreno que se mide es de poca longitud, como sucede en el trazado de la planta de un edificio, se hace uso de la *cinta métrica* (fig. 5), que es una cinta de tela o de acero de 10 o de 20 metros de longitud, dispuesta para ser arrollada, facilitando así el transporte.

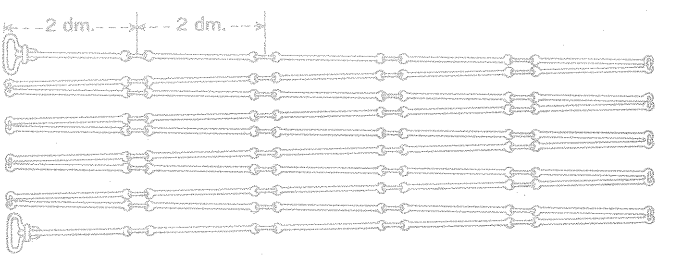


FIG. 6. — Cadena de agrimensor.

73. Número complejo e incomplejo. — Toda cantidad viene expresada por un número concreto, el cual puede presentarse en forma de *incomplejo* o de *complejo,* según esté referido a una sola clase de unidades o a varias.

Así en la igualdad

42.875 Km = 4 Mm 2 Km 8 Hm 7 Dm 5 m

el primer miembro representa un número incomplejo, mientras que el segundo expresa al correspondiente número complejo.

74. Complejos e incomplejos de longitud. — Cada unidad de longitud contiene *diez* unidades del orden inmediato inferior. Por consiguiente, las unidades de cada orden ocupan un solo lugar en la escritura, y de acuerdo con esto, las medidas de longitud pueden leerse y escribirse:

1.° *En forma de incomplejos,* como números decimales.

EJEMPLO: 40'385 Km. (Se lee: 40 Km 385 milésimas de Km o 40 Km 385 metros).

2.° *En forma de complejos,* descomponiéndolos en las unidades de cada orden.

EJEMPLO: El número del ejemplo anterior puede escribirse también así:

4 Mm 3 Hm 8 Dm 5 m

De lo dicho se deduce la manera de expresar un complejo de longitud en forma de incomplejo o viceversa. Compruébense, por ejemplo, en ambos sentidos las siguientes igualdades:

8 Hm 4 Dm 3 m = 843 m
17 Mm 3 Km 9 Dm 5 cm = 173.090'05 m
6 Dm 4 dm 7 cm 2 mm = 60'472 m

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE LONGITUD

Mm	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
•	•	•	•	•	•	•	•

Cada punto significa un lugar en la escritura.

EJERCICIOS

133. ¿Cuál es el múltiplo del metro que indica: centenas de dm; decenas de Km; centenas de Dm; centésimas de Km; décimas de Hm?

134. ¿Cuál es el submúltiplo del metro que indica: decenas de cm; centenas de mm; milésimas de Hm; cienmilésimas de Mm; millonésimas de Km?

135. ¿Qué representa cada cifra en los números siguientes: 1.º, 78'235 kilómetros?; 2.º, 1.825'7 mm?; 3.º, 127'89 Hm?; 4.º, 3.254'28 Dm?

136. Cuando se toma por unidad el kilómetro, ¿qué representan las centésimas?, las decenas?, las décimas?, las milésimas?, las diezmilésimas?

137. Cuando se toma por unidad el decámetro, ¿qué representan las décimas?, las milésimas?, las centésimas?, las centenas?, las decenas?

138. Dígase: ¿Cuántos Dm tiene un Km? ¿Cuántos cm tiene un Dm? ¿Cuántos mm tiene un Hm? ¿Cuántos dm tiene un Mm?

139. Decir, cambiando sólo el nombre de la unidad, un número 10 veces mayor que 5 m, 10 veces menor, 100 veces mayor, 1.000 veces menor, 1.000 veces mayor.

140. ¿Cuál es la unidad cuando las centésimas representan m? ¿Y cuando las centenas representan Mm? ¿Y cuando los millares representan Dm?

141. Un segmento rectilíneo mide 0'5 m y otro 46 dm. ¿Cuál es el mayor? ¿Cuál es en mm la suma de los dos?

142. La suma de dos longitudes es 2 Hm y la diferencia 6 Dm. ¿Cuáles son? (Expresar el resultado en metros.)

143. Pasar de la forma compleja a la incompleja:

6 Hm 2 Dm 7 m 5 cm a metros; 68 Km 2 Dm 520 cm 4 mm a hectómetros; 12 Mm 5 Hm 4 m 56 mm a decámetros; 346 Mm 19 Hm 5 m a kilómetros; 27 Km 38 Hm 92 m 136 mm a centímetros.

144. Pasar de la forma incompleja a la compleja:

387'10064 Km; 69.402'065 m; 1.264'083 Hm; 41.600'3872 Dm

145. Cambio de unidad. Expresar:

145'6841 Km en m; 3'69 m en Km; 2.720.065'93 cm en Hm.

146. ¿Cuántos kilómetros son las tres quintas partes de 850 Hm? ¿Y cuántos metros son las 0'25 de 3 Km?

147. Un ciclista ha recorrido las dos quintas partes de una carrera y le faltan 16'2 Km para llegar a su destino. ¿Cuántos hectómetros tiene el recorrido total?

148. Se han comprado dos piezas de tela; por una se pagaron 1.576 pesetas y por la otra 2.724 pesetas. El metro de la primera cuesta 7'50 pesetas menos que el de la segunda. Hallar el número de metros de cada pieza, sabiendo que un metro de cada una cuestan juntos 106 pesetas.

11. Unidades de superficie y de volumen

75. Superficie y área. — La extensión de los campos, del piso o de las paredes de una habitación, nos da idea de la superficie como *magnitud*, ya que podemos suponer una superficie igual a otra y una superficie suma de otras varias.

La medida de una superficie se llama área.

76. Unidades de extensión o superficie. — La UNIDAD PRINCIPAL *se denomina metro cuadrado, y es la superficie de un cuadrado que tiene un metro de lado.* Se representa por m^2.

Los MÚLTIPLOS, llamados *decámetro cuadrado (Dm^2), hectómetro cuadrado (Hm^2), kilómetro cuadrado (Km^2)* y *miriámetro cuadrado (Mm^2),* son las superficies de sendos cuadrados cuyos lados respectivos miden un decámetro, un hectómetro, un kilómetro y un miriámetro.

Los SUBMÚLTIPLOS, denominados *decímetro cuadrado (dm^2), centímetro cuadrado (cm^2)* y *milímetro cuadrado (mm^2),* son las superficies de sendos cuadrados que tienen respectivamente un decímetro, un centímetro y un milímetro de lado.

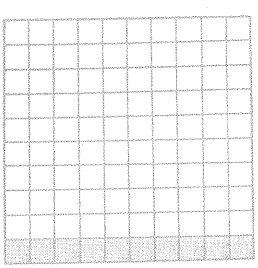


FIG. 7

RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DE SUPERFICIE. Cada unidad de superficie contiene 100 unidades del orden inmediato inferior. Esto es lo que se quiere indicar al decir que las unidades de superficie van de 100 en 100.

Para probarlo, consideremos, por ejemplo, un decímetro cuadrado (figura 7), en tamaño reducido. (Dibújelo el alumno en tamaño natural).

Si dividimos cada lado en 10 cm, podemos formar una cuadrícula en la que cada cuadrado es 1 cm^2. Como hay 10 filas de 10 cuadrados cada una, será

$$1\ dm^2 = 10\ cm^2 \times 10 = 100\ cm^2$$

El mismo razonamiento se podría aplicar a otra unidad de superficie cualquiera, por lo que resulta:

$$\begin{aligned}
1\ Mm^2 &= 100\ Km^2 = 100.000.000\ m^2 \\
1\ Km^2 &= 100\ Hm^2 = 1.000.000\ m^2 \\
1\ Hm^2 &= 100\ Dm^2 = 10.000\ m^2 \\
1\ Dm^2 &= 100\ m^2 \\
1\ dm^2 &= 0'01\ m^2 \\
1\ cm^2 &= 0'01\ dm^2 = 0'0001\ m^2 \\
1\ mm^2 &= 0'01\ cm^2 = 0'000001\ m^2
\end{aligned}$$

77. **Unidades agrarias.** — Algunas unidades de superficie se denominan *agrarias,* por utilizarse para expresar la extensión de los campos. Tales son, el Hm^2, el Dm^2 y el m^2. En este caso, el Hm^2 recibe el nombre de *hectárea* (Ha), el Dm^2 se denomina *área* (a) y el m^2 se llama *centiárea* (ca).

78. **Medición de extensiones.** — A diferencia de lo que ocurre con las unidades de longitud, no existen unidades reales de superficie; es decir, no se fabrican *patrones* que se apliquen directamente sobre las superficies que se quieren medir. Es más cómodo medir sólo longitudes y calcular luego las áreas mediante reglas y fórmulas que se estudian en Geometría. En el párrafo que sigue vamos a ver cómo se procede en un caso sencillo.

79. **Área del rectángulo.** — Supongamos el rectángulo de la figura 8. Si al medir sus dimensiones (largo y ancho) vemos que son 5 cm y 3 cm, podremos afirmar que el área del rectángulo es 15 cm^2.

Para comprenderlo basta observar que, midiendo el lado mayor 5 cm, podemos colocar sobre él una fila de 5 cuadrados de un centímetro de lado, y como el lado menor mide 3 cm, sobre

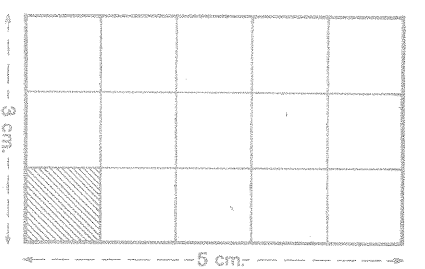


FIG. 8

el rectángulo cabrán 3 filas de 5 cm^2 cada una; o sea que el área de dicho rectángulo será $5 \times 3 = 15\ cm^2$.

> **El área de un rectángulo se obtiene multiplicando los números que expresan la medida de sus dimensiones, referidos a la misma unidad.**

80. Complejos e incomplejos de área. — Para escribir en forma de complejo un número decimal que expresa área se descompone en grupos de dos cifras a partir de la coma, a derecha e izquierda, indicando el orden de las unidades que cada grupo representa. El último grupo de la derecha se completará con un cero si sólo tuviera una cifra.

EJEMPLOS:

$$5.037.210'005\ m^2 = \begin{cases} 5 & 03 & 72 & 10 & 00 & 50 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Km^2 & Hm^2 & Dm^2 & m^2 & dm^2 & cm^2 \end{cases}$$

es decir: $5.037.210'005\ m^2 = 5\ Km^2\ 3\ Hm^2\ 72\ Dm^2\ 10\ m^2\ 50\ cm^2$

Del mismo modo: $171'026\ dm^2 = 1\ m^2\ 71\ dm^2\ 2\ cm^2\ 60\ mm^2$

$681.205\ ca = 68\ Ha\ 12\ a\ 5\ ca$

El paso de la forma compleja a la incompleja resulta también sencillo si se tiene en cuenta que las unidades de superficie varían de 100 en 100 y que cada orden ocupa dos lugares. Si algún orden carece de alguna de las cifras necesarias, se suplen con ceros.

EJEMPLOS:

$12\ Km^2\ 7\ Hm^2\ 32\ m^2 = 12.070.032\ m^2$

$9\ dm^2\ 75\ cm^2 = 0'0975\ m^2$

$4\ Ha\ 16\ a\ 9\ ca = 416'09\ a = 416'09\ Dm^2$

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE SUPERFICIE

		Ha	a	ca			
Mm^2	Km^2	Hm^2	Dm^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •	• •

81. Concepto de volumen. — El espacio que ocupan los cuerpos nos da idea del volumen como magnitud, ya que se puede imaginar un volumen igual a otro y un volumen que sea la suma de otros varios.

El volumen, por tanto, es una *magnitud* y el volumen particular de cada cuerpo es una *cantidad* de esa magnitud.

82. Unidades de volumen. — La UNIDAD PRINCIPAL es el *metro cúbico,* que se representa abreviadamente por m^3.

Metro cúbico es el volumen de un cubo que tiene un metro de arista (*).

Los MÚLTIPLOS, denominados *decámetro cúbico (Dm³), hectómetro cúbico (Hm³), kilómetro cúbico (Km³)* y *miriámetro cúbico (Mm³),* son los volúmenes de sendos cubos cuyas aristas miden un decámetro, un hectómetro, un kilómetro y un miriámetro, respectivamente. Todos ellos, especialmente el Mm^3, son poco usados.

Los SUBMÚLTIPLOS, llamados *decímetro cúbico (dm³), centímetro cúbico (cm³)* y *milímetro cúbico (mm³),* son los volúmenes de otros tantos cubos que tienen por aristas respectivas un decímetro, un centímetro y un milímetro.

RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DE VOLUMEN. Cada unidad de volumen contiene 1.000 unidades del orden inmediato inferior. Esto es lo que se quiere indicar al decir que las unidades de volumen van de 1.000 en 1.000

Para probarlo, supongamos, por ejemplo, un decímetro cúbico y contemos cuántos centímetros cúbicos caben en él. Como se ve en la figura, pueden formarse 10 pisos con

$$10 \times 10 = 100 \text{ cm}^3$$

en cada piso. Es decir, que

$$1 \text{ dm}^3 = 100 \text{ cm}^3 \times 10 = 1.000 \text{ cm}^3$$

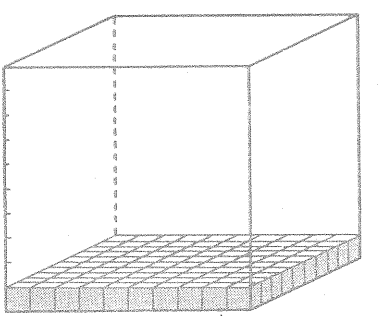


FIG. 9

83. Medición de volúmenes. Volumen del ortoedro. — Como sucede con la medición de superficies, la de volúmenes también se calcula des-

(*) Recuérdese que se llama *cubo* al cuerpo limitado por 6 caras que son cuadrados iguales. Los lados comunes a dos caras se denominan *aristas*. Los dados que se emplean para jugar son cubos.

pués de medir directamente algunas longitudes correspondientes a los cuerpos cuyo volumen se desea hallar.

Consideremos ahora un ejemplo sencillo. Sea un ortoedro (*) (fig. 10) cuyas aristas concurrentes en un vértice miden 5 cm, 4 cm y 3 cm. El área de su base será $5 \times 4 = 20$ cm^2. Sobre cada uno de estos cm^2 se puede colocar 1 cm^3, obteniéndose una capa compuesta de 20 cm^3. Para completar el ortoedro son necesarias 3 de esas capas; por tanto, el volumen será

$$20 \text{ cm}^3 \times 3 = 60 \text{ cm}^3$$

o lo que es igual

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ cm}^3$$

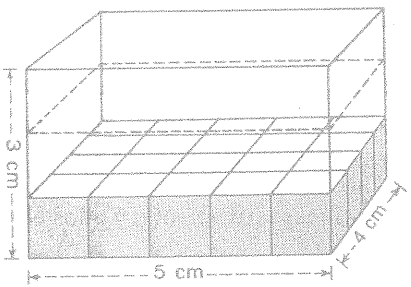


FIG. 10

El volumen de un ortoedro se obtiene multiplicando los números que expresan la medida de sus tres dimensiones, todos ellos referidos a la misma unidad.

84. **Complejos e incomplejos de volumen.** — Para escribir en forma de complejo un número que expresa volumen se separan tres lugares para cada unidad a partir de la coma, a derecha e izquierda, indicando la clase de unidades de cada grupo. El último grupo de la derecha se completará con uno o dos ceros si sólo tuviera dos o una cifra.

EJEMPLOS:

$$53.207.048'1926 \text{ m}^3 = \begin{cases} 53 & 207 & 048 & 192 & 600 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Hm}^3 & \text{Dm}^3 & \text{m}^3 & \text{dm}^3 & \text{cm}^3 \end{cases}$$

es decir:

$$53.207.048'1926 \text{ m}^3 = 53 \text{ Hm}^3\ 207 \text{ Dm}^3\ 48 \text{ m}^3\ 192 \text{ dm}^3\ 600 \text{ cm}^3$$

(*) En Geometría, los cuerpos que tienen la forma de caja o de una habitación se llaman *ortoedros*. Los lados comunes a dos caras se denominan *aristas* del ortoedro.

Del mismo modo: 54'961 dm^3 = 54 dm^3 961 cm^3

38.751.004.966 cm^3 = 38 Dm^3 751 m^3 4 dm^3 966 cm^3

El paso de la forma incompleja a la compleja se hace fácilmente. Basta tener presente que las unidades de volumen varían de 1.000 en 1.000 y que cada orden ocupa tres lugares. Si algún orden careciera de alguna de las cifras necesarias, se suplirán con ceros.

EJEMPLOS:

4 m^3 15 dm^3 = 4'015 m^3

11 m^3 7 dm^3 234 cm^3 = 11.007'234 dm^3

17 Hm^3 9 Dm^3 508 dm^3 = 17.009.000'508 m^3

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE VOLUMEN

Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●

EJERCICIOS

149. ¿Cuál es el múltiplo o submúltiplo del m^2 que equivale a 1.000.000 de m^2? ¿a 10.000 dm^2? ¿a 100 Dm^2? ¿a 100.000.000 de m^2? ¿a 0'0001 m^2?

150. ¿Cuántos m^2 hay en una decena de Dm^2? ¿en una décima de Dm^2? ¿en un millar de dm^2? ¿en una decena de Hm^2? ¿en una centena de mm^2?

151. ¿Qué orden de unidades representa cada una de las cifras de los números siguientes: 31.264'5708 m^2; 7.401'2 Dm^2; 139'485 Km^2; 0'3350678 Hm^2?

152. ¿Cuántos cm^2 tiene medio m^2? ¿Cuántos cm^2 tiene la mitad de un m^2?

153. ¿Cómo se llama la milésima parte de la décima parte del Hm^2?

154. ¿Cuántos m^2 hay en 3 Ha? ¿en 12 a? ¿en 72 ca? ¿en una décima de Ha? ¿en una décima de a?

155. ¿Cuántas Ha hay en un kilómetro cuadrado?

156. ¿Cuántos cm^2 hay en la centésima parte del m^2?

157. Expresar en m^2 los siguientes números:

8'2 Km^2; 0'04 Km^2; 1'26 Dm^2; 0'91 Hm^2; 4027'3 cm^2

158. Reducir a incomplejo cada uno de los complejos siguientes:

18 Km^2 9 Dm^2 4 m^2 7 dm^2, expresado en m^2
5 Hm^2 12 Dm^2 9 dm^2 23 cm^2, » en Dm^2
6 Dm^2 3 m^2 17 dm^2, » en cm^2
13 Ha 29 a 6 ca, » en m^2

159. Expresar, respectivamente, en Dm^2, dm^2, m^2 y áreas, los resultados del ejercicio anterior.

160. Hallar la diferencia entre el valor de un solar de 6'2 Dm^2 vendido a 221 pesetas el m^2 y el de un campo de 9.186 m^2 tasado en 69.000 ptas. la Ha.

161. Un solar tiene la forma de rectángulo, y sus dimensiones son 0'86 Hm y 3'2 Dm. ¿Cuánto valdrá a razón de 137 ptas. el m^2?

162. ¿Cuál es el múltiplo o submúltiplo del m^3 que equivale a 1.000.000 de m^3? ¿a la millonésima del m^3? ¿a la milésima del m^3? ¿a la milmillonésima del m^3?

163. ¿Cuántos mm^3 tiene: 1.º, 1 dm^3; 2.º, 1 m^3; 3.º, 1 cm^3; 4.º, 1 Dm^3?

164. ¿Cómo se llama la centésima parte de la décima parte del dm^3?

165. ¿Cuántos dm^3 tiene la décima parte de un metro cúbico? ¿Cuántos cm^3 tiene la centésima parte de un metro cúbico?

166. Dígase la diferencia que hay entre la décima de m^3 y el dm^3; entre la centésima de m^3 y el cm^3; entre la milésima de m^3 y el mm^3.

167. Expresar en cm^3 los números siguientes:

269'34 m^3; 0'00071 Dm^3; 15'8 m^3; 768'4 dm^3; 3'01 dm^3

168. Escribir en forma de complejo cada uno de los números del ejercicio anterior.

169. Reducir a incomplejo cada uno de los números siguientes:

8 m^3 21 dm^3 186 cm^3, expresado en m^3
2 m^3 39 dm^3 117 cm^3 4 mm^3, » en cm^3

170. Expresar en m^3 el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 3 m, 17 dm y 189 cm.

171. La arista de un cubo mide 1'8 m. ¿Cuál es su volumen, expresado en dm^3?

172. Mídanse las dimensiones de la clase con aproximación de centímetros y hállese luego el volumen.

173. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS. Construir en cartulina un decímetro cúbico y un centímetro cúbico. Construir asimismo un cubo cuya arista sea igual a medio dm. y un ortoedro que sea la mitad de un dm^3.

12. Unidades de capacidad y de peso. Monedas

85. Unidades de capacidad. — Los recipientes destinados a contener líquidos o gases tienen un volumen interior, que en este caso se denomina *capacidad*. La capacidad es una magnitud, y la capacidad particular de cada recipiente es una cantidad de esa magnitud.

La UNIDAD PRINCIPAL de capacidad es el *litro*, que *es la capacidad de un decímetro cúbico*. Se representa por *l*.

Los MÚLTIPLOS, denominados *decalitro* (*Dl*), *hectolitro* (*Hl*), *kilolitro* (*Kl*) y *mirialitro* (*Ml*), equivalen respectivamente a 10, 100, 1.000 y 10.000 litros.

Los SUBMÚLTIPLOS, llamados *decilitro* (*dl*), *centilitro* (*cl*) y *mililitro* (*ml*), equivalen a 0'1, 0'01 y 0'001 de litro, respectivamente.

RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DE CAPACIDAD. Cada unidad de capacidad contiene 10 unidades del orden inmediato inferior. Por consiguiente, son aplicables a estas unidades las reglas para pasar de la forma incompleja a la compleja, y viceversa. Por ejemplo:

9'53 Hl = 9 Hl 5 Dl 3 l

4 Hl 7 Dl 2 dl = 47'02 Dl

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE CAPACIDAD

Ml	Kl	Hl	Dl	l	dl	cl	ml
•	•	•	•	•	•	•	•

86. Medición de capacidades. — Para la medición de capacidades hay patrones de distintas formas, como los que aparecen en las figuras 11 y 12.

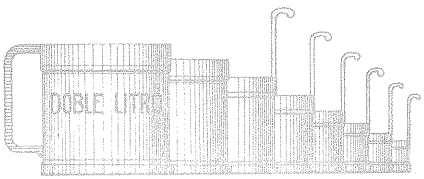


FIG. 11. — MEDIDAS DE HOJALATA PARA LECHE Y ACEITE

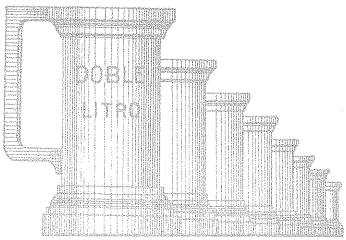


FIG. 12. — MEDIDAS DE ESTAÑO PARA VINO

En los laboratorios y perfumerías se usan vasijas de vidrio (probetas) graduadas en centímetros cúbicos. En los puestos de gasolina, ésta se suministra por medio de aparatos que al mismo tiempo miden la cantidad de líquido.

87. **Unidades de peso** — La UNIDAD PRINCIPAL es el *gramo* (g), que *es el peso en el vacío de un centímetro cúbico de agua pura a la temperatura de* 4 *grados centígrados* (*).

En el Pabellón internacional de pesas y medidas de París se conserva como patrón de peso el kilogramo, que equivale a 1.000 gramos. Se define así:

> **Kilogramo-patrón es un cilindro de platino iridiado que se conserva en París y cuyo peso, en el vacío, es el de 1 dm³ de agua pura a 4 grados centígrados.**

Los MÚLTIPLOS del gramo son el *decagramo* (*Dg*), el *hectogramo* (*Hg*), el *kilogramo* (*Kg*) y el *miriagramo* (*Mg*), que equivalen respectivamente a 10, 100, 1.000 y 10.000 gramos.

Para pesos grandes se usan, además, el *quintal métrico* (*Qm*), que vale 100 kilogramos, y la *tonelada métrica* (*Tm*), que equivale a 1.000 kilogramos.

Los SUBMÚLTIPLOS son el *decigramo* (*dg*), el *centigramo* (*cg*) y el *miligramo* (*mg*), que equivalen respectivamente a 0'1, 0'01 y 0'001 de gramo.

Las unidades de peso siguen la misma *relación* decimal que las de longitud y de capacidad. Por tanto, las reglas para pasar de la forma incom-

(*) Se escoge esta temperatura porque es cuando el agua es más pesada.

pleja a la compleja y viceversa serán también las mismas que para aquellas unidades. Ejemplo:

$$3207'2 \text{ Kg} = 3 \text{ Tm } 2 \text{ Qm } 7 \text{ Kg } 2 \text{ Hg}$$
$$3 \text{ Dg } 9 \text{ dg } 2 \text{ cg} = 30'92 \text{ g}$$

ESQUEMA DE LAS UNIDADES DE PESO

Tm	Qm	Mg	Kg	Hg	Dg	g	dg	cg	mg
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

88. Medición de pesos. — Para la medida de pesos se emplean básculas y balanzas. Estas últimas llevan un sistema de *pesas* o patrones de peso conocido. Su empleo es bien conocido.

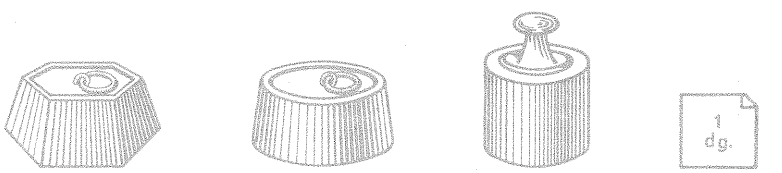


FIG. 13. — GRUPO DE PESAS (HIERRO, LATÓN) USADAS PARA LAS BALANZAS

Ordinariamente, los pesos vienen expresados en Tm, Qm, Kg y g. En las farmacias y laboratorios se usan el cg y el mg.

89. Relación entre las unidades de volumen, capacidad y peso. — Tratándose de *agua pura,* son equivalentes las siguientes unidades:

VOLUMEN	CAPACIDAD	PESO (si es agua)
1 m^3	1 Kl	1 Tm
1 dm^3	1 l	1 Kg
1 cm^3	1 ml	1 g

90. Peso específico y densidad. — Cuando no se trata de agua pura, sino de *otra sustancia,* el peso de 1 dm^3 de la misma no será 1 Kg, sino un número de kilogramos, entero o decimal, mayor o menor que uno. A este número se le llama peso específico de la sustancia en cuestión.

Peso específico de una sustancia es el número de kilogramos que pesa 1 dm^3 de dicha sustancia.

Evidentemente, también será el número de Tm que pesa 1 m^3, o el número de gramos que pesa 1 cm^3.

Por ejemplo, el peso específico del hierro es 7'8 Kg/dm^3, 7'8 Tm/m^3 o 7'8 g/cm^3.

Si consideramos un trozo de hierro y dividimos su peso en Kg. por el peso, también en Kg, de un volumen igual de agua, obtendremos por cociente el número abstracto 7'8.

Este número es la *densidad* del hierro con relación al agua. Quiere decir que un cuerpo de hierro pesa 7'8 veces más que un volumen igual de agua. El peso específico y la densidad de las diversas sustancias vienen expresados por el mismo número.

DENSIDAD DE ALGUNAS SUSTANCIAS CON RELACIÓN AL AGUA

Oro	19'3	Leche	1'03
Mercurio	13'59	**Agua pura**	**1**
Plomo	11'35	Aceite de oliva	0'915
Plata	10'5	Alcohol	0'79
Hierro	7'8	Corcho	0'24

91. Razón de dos cantidades homogéneas. — *Razón de dos cantidades homogéneas es el número que expresa la medida de la primera cuando se toma la segunda por unidad.*

En el párrafo anterior hemos visto que el cociente entre el peso de un cuerpo de hierro y el peso de un volumen igual de agua es 7'8. Esto, como dijimos, significa que comparando los pesos de dos volúmenes iguales de hierro y agua, el del hierro es 7'8 veces mayor que el del agua, o, de otro modo: tomando como unidad el peso de un volumen de agua, el peso de otro volumen igual de hierro es 7'8.

La razón de dos cantidades homogéneas se halla dividiendo los números que las miden respecto de la misma unidad.

EJEMPLO. La capacidad de una vasija es de 14'25 litros y la de otra 7'5 decilitros. ¿Cuál es la razón de la capacidad de la primera vasija a la de la segunda?

La razón pedida será 14'25 : 0'75 = 19.

92. Monedas. Billetes de Banco. — La unidad monetaria en España es la *peseta* (*). Se considera dividida en 100 céntimos.

Antiguamente existían monedas de oro y plata, pero han sido retiradas de la circulación. Las que actualmente circulan están fabricadas con otros metales más inferiores (aluminio, cobre, níquel), y son las siguientes: de 0'10 ptas., de 0'50 ptas., de 1 pta., de 2'50 ptas., de 5 ptas., de 25 ptas. y de 50 ptas.

Llámase *papel-moneda* o *billetes de Banco,* la moneda que circula en forma de papel. Son documentos por los cuales el Banco de España se compromete a pagar al portador del billete las pesetas que figuran escritas en el mismo. Solamente el Estado puede poner en circulación el papel-moneda; lo hace por medio del Banco de España, que es quien tiene bajo su custodia el oro o la plata metálicos cuyo valor representan los billetes emitidos. Actualmente hay billetes de 1 pta., 5 ptas., 25 ptas., 50 ptas., 100 ptas., 500 ptas. y 1.000 ptas.

EJERCICIOS

174. ¿Qué múltiplo del litro equivale a 10 dl? ¿a 10 Dl? ¿a 1.000 dl? ¿a 10.000 cl? ¿a 100 Hl?

175. ¿Cuántos litros hay en 12 Dl? ¿en 15 Hl? ¿en 480 dl? ¿en 70.000 ml? ¿en 103 Kl?

176. Expresar en centilitros los números siguientes:

36'421 l; 9'0825 Hl; 0'0742 Dl; 3'01 Kl; 59'2 ml

177. Reducir a incomplejo cada uno de los números siguientes:

7 Dl 3 l 4 cl	expresado	en litros
5 Hl 9 l 6 dl 1 cl	»	en decilitros
8 Kl 2 Hl 3 l	»	en decalitros
4 Hl 9 Dl 5 l	»	en metros cúbicos

178. ¿Qué capacidad, en litros, tiene la mitad de un metro cúbico? ¿la cuarta parte del metro cúbico? ¿la quinta parte del metro cúbico?

179. ¿Cuál es la capacidad, en litros, de un depósito que tiene forma de ortoedro y cuyas dimensiones son 0'064 Hm, 0'38 Dm y 2'9 m?

180. ¿Cuántos vasos de 125 cm^3 de volumen se podrán llenar con el vino que cabe en 7 botellas de litro?

(*) El sistema monetario no es internacional. Cada país tiene sus monedas y el valor relativo de unas con otras fluctúa continuamente. He aquí la unidad monetaria de algunas naciones: *escudo* (Portugal), *franco* (Francia), *franco suizo* (Suiza), *franco belga* (Bélgica), *lira* (Italia), *marco* (Alemania), *libra esterlina* (Inglaterra), *rublo* (Rusia), *dólar* (Estados Unidos), *peso* (Argentina), *cruceiro* (Brasil).

181. Para embotellar 243 litros de leche se han empleado botellas de litro y de 75 centilitros. Sabiendo que el número de botellas pequeñas excede en 23 al de las grandes, averiguar cuántas hay de cada clase.

182. Entre dos toneles contienen 6'2 Hl de vino. Sabiendo que uno de ellos tiene 9'8 Dl más que el otro, se pregunta cuánto valdrá el vino contenido en cada tonel, al precio de 5'35 ptas. el litro.

183. ¿Cuántos kilogramos hay en 3 Tm? ¿en 20 Qm? ¿en 1.250 Hg? ¿en 0'860 Tm? ¿en 256.000.000 dg?

184. ¿Cuántos quintales métricos hay en 7.300 Kg? ¿en 16 Tm? ¿en 84.000 Hg? ¿en 0'9 Tm? ¿en 439.850.000 g?

185. Convertir en incomplejos de kilogramos, gramos, decigramos y miligramos, respectivamente, los complejos que siguen: 9 Tm 52 Qm 4 Hg; 2 Kg 6 Dg 7 g; 8 Hg 3 g 1 cg; 2 Dg 7 dg 9 mg.

186. Una tonelada métrica de remolacha se vende a 815 ptas. ¿Cuánto habrá que pagar por 140 Kg? ¿Cuántos Qm podremos comprar con 5.705 ptas.?

187. Para transportar 7 toneladas y media de carbón, un camión ha hecho dos viajes. En el primer viaje, el camión cargado pesó 7.050 Kg y en el segundo, 5.450 Kg. Calcular el peso del camión.

188. Sabiendo que 7 m^3 de madera de roble pesan 5'74 Tm, que 13 dm^3 de estaño pesan 94'77 Kg y que 9 cm^3 de plomo pesan 102'15 g, averiguar el peso específico del roble, del estaño y del plomo.

189. Hallar el peso de una plancha de corcho de 2'3 m de longitud, 16 dm de anchura y 75 mm de grueso. Densidad del corcho, 0'24.

190. Un bloque de mármol ha sido tallado en forma de cubo, de 0'9 m de arista. ¿Cuál es su peso en kilogramos, si la densidad del mármol es 2'7?

191. La densidad del acero es 7'86. ¿Qué volumen ocupará un yunque de acero que pesa 94.320 gramos?

192. Un cántaro vacío pesa 18 Hg y lleno de leche pesa 11'585 Kg. Hallar la capacidad de ese cántaro, suponiendo que la leche tiene por densidad 1'03.

193. Hallar la capacidad de un barril que lleno de alcohol pesa 395 Kg y vacío 11'85 Kg, sabiendo que la densidad del alcohol es 0'79.

194. ¿Cuál es el peso de un bloque cúbico de piedra de 1'4 metros de arista, si la densidad de esa clase de piedra es 2'73?

195. ¿Cuál será el importe de 5 bidones de aceite de oliva, de 140 litros cada uno, si el kilo de aceite se paga a 21'80 ptas.? Densidad del aceite de oliva, 0'915.

196. Un litro de agua ocupa, al congelarse, un volumen de 1.089 cm^3. Calcular la densidad del hielo.

197. Dibújense dos segmentos y hállese la razón de sus longitudes.

198. Se han pagado 320 ptas. con monedas de 25 ptas. y de 5 ptas. El número de las de 25 ptas. es triple que el de las de 5 ptas. ¿Cuántas se han dado de cada clase?

13. Fracciones ordinarias

93. Noción de fracción. — Supongamos que para hallar la longitud de un segmento adoptamos por unidad la longitud de una tira de papel, como la representada en la figura.

Si dividimos esta tira unidad en partes iguales, cada una de las partes se llama *unidad fraccionaria.* Dividámosla, por ejemplo, en 7 partes iguales.

Una cualquiera de ellas será *un séptimo,* y de un segmento igual a 4 de estas partes diremos que su medida está expresada por *cuatro séptimos.*

Tomemos otra tira igual a la anterior, dividida también en 7 partes iguales o *siete séptimos.* Añadiendo esta tira a la que representaba cinco séptimos, obtendremos otra formada por *once séptimos.*

Las expresiones *un séptimo, cuatro séptimos, once séptimos,* son fracciones. En general:

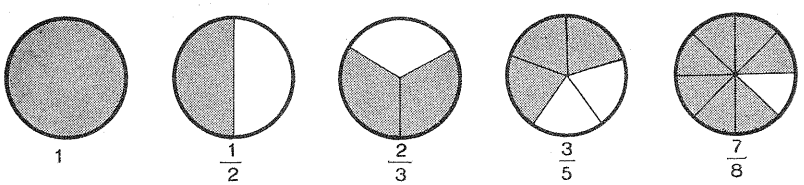
> **Dada una unidad, si la dividimos en varias partes iguales, diremos que una de esas partes o un determinado número de ellas constituye una FRACCIÓN de dicha unidad.**

Una fracción queda determinada mediante dos números naturales: el uno, llamado *denominador,* indica en cuántas partes se ha dividido a la unidad, y el otro, llamado *numerador,* expresa cuántas de esas partes se toman. Numerador y denominador son llamados *términos de la fracción.*

La fracción se escribe poniendo el denominador debajo del numerador y separando ambos por una raya horizontal.

Para leer una fracción se enuncia el numerador y después el denominador, con la terminación *avos*. Excepciones: 1) Si el denominador es inferior a 10 no se termina en avos, sino que se nombra: *medios, tercios, cuartos, ..., novenos*. 2) Si el denominador es 10, 100, 1.000, ... (fracciones decimales), la fracción se escribe y se nombra como se indicó en los párrafos 54 y 55.

EJEMPLOS. Las fracciones $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{11}{12}, \frac{63}{48}$, se leerán, respectivamente, dos tercios, cuatro novenos, once doceavos, sesenta y tres cuarenta y ocho avos. Si representamos a la unidad por un círculo, las partes sombreadas en las figuras siguientes corresponden a



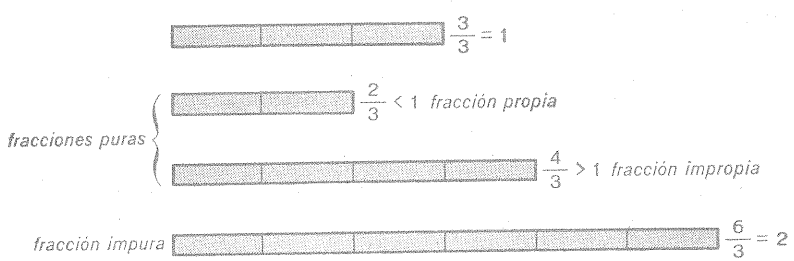
94. Clasificación de las fracciones. — *Fracción* PROPIA *es aquella que es menor que la unidad;* su numerador es menor que el denominador.

Fracción IMPROPIA *es la que es mayor que la unidad;* tiene el numerador mayor que el denominador.

Fracción PURA *es la que no equivale a un número entero;* su numerador no es múltiplo del denominador.

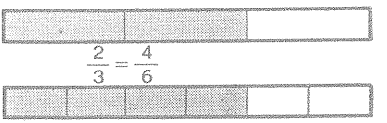
Fracción IMPURA *es aquella que equivale a un número entero;* su numerador es múltiplo del denominador.

Todas estas definiciones quedan aclaradas con el gráfico adjunto.



95. Propiedad fundamental de las fracciones. Fracciones equivalentes. — Dada una fracción, por ejemplo $\frac{2}{3}$, si en lugar de dividir a la unidad en 3 partes se la hubiese dividido en $3 \times n$ partes, cada una de éstas sería n veces menor que las anteriores; pero tomando $2 \times n$ de las últimas, el resultado será el mismo de antes:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times n}{3 \times n} \qquad \text{o, si } n = 2, \qquad \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$



Podemos, por tanto, enunciar la siguiente propiedad:

> **Si se multiplican o dividen los dos términos de una fracción por un mismo número, la fracción no varía.**

Consecuencia de esta propiedad es que una fracción puede expresarse por infinitos pares de números, tomados como numerador y denominador, y las fracciones que resultan son todas *equivalentes*. Así,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} =$$

96. Simplificación y amplificación de fracciones. — SIMPLIFICAR una fracción es hallar otra equivalente cuyos términos sean menores.

Para simplificar una fracción se dividen los dos términos por todos los divisores comunes.

EJEMPLO. Simplificaremos la fracción $\frac{105}{180}$ dividiendo el numerador y el denominador por 3 y por 5. La operación suele disponerse así:

$$\frac{105}{180} \overset{3}{=} \frac{35}{60} \overset{5}{=} \frac{7}{12}$$

Fracción irreducible es aquella que no puede simplificarse por no tener sus términos ningún divisor común.

EJEMPLO. Son fracciones irreducibles: $\frac{7}{12}$; $\frac{24}{35}$; $\frac{56}{81}$.

AMPLIFICAR una fracción es hallar otra equivalente de términos mayores.

Un caso en que se hace uso de la amplificación de fracciones es el siguiente: Si, por ejemplo, queremos hallar la fracción equivalente a $\frac{3}{7}$ que tiene por denominador 35, bastará que multipliquemos los dos términos por 5, con lo que resulta $\frac{15}{35}$. En general: *Para reducir una fracción a otra de denominador múltiplo del suyo, se multiplica el numerador por el resultado de dividir el nuevo denominador por el de la fracción.*

97. Reducción de fracciones a un común denominador.

Reducir fracciones a un común denominador es transformarlas en otras equivalentes que tengan igual denominador.

Para reducir fracciones a un común denominador basta elegir un nuevo denominador múltiplo de los denominadores y aplicar la regla para reducir una fracción a otra de denominador múltiplo del suyo.

En la práctica, distinguiremos los dos casos siguientes:

1.° *No se descubre fácilmente un múltiplo común de los denominadores.* En este caso se toma como denominador común el producto de los denominadores, y para obtener los nuevos numeradores se multiplica el de cada fracción por el producto de los denominadores de las restantes fracciones.

EJEMPLO. Sean las fracciones: $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{8}$.

Denominador común: $5 \cdot 7 \cdot 8$.

Las fracciones equivalentes a las dadas son, respectivamente:

$$\frac{2 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 8}; \quad \frac{4 \cdot 5 \cdot 8}{5 \cdot 7 \cdot 8}; \quad \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 8} \quad \text{o} \quad \frac{112}{280}; \quad \frac{160}{280}; \quad \frac{105}{280}$$

2.º *Uno de los denominadores es múltiplo de los demás.* Entonces, se toma como denominador común dicho múltiplo.

EJEMPLO. Sean las fracciones: $\frac{7}{8}$; $\frac{11}{24}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$.

Como 24 es múltiplo común de los denominadores, éste será el denominador común que elijamos. Luego, diremos: $24 : 8 = 3$; $7 \cdot 3 = 21$ (primer numerador); el segundo numerador sigue siendo 11; $24 : 3 = 8$; $2 \cdot 8 = 16$ (tercer numerador); $24 : 6 = 4$; $5 \cdot 4 = 20$ (cuarto numerador). Por consiguiente, las nuevas fracciones son:

$$\frac{21}{24}; \quad \frac{11}{24}; \quad \frac{16}{24}; \quad \frac{20}{24}$$

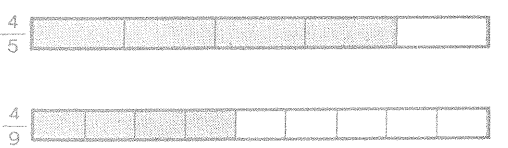
98. Comparación de fracciones. — I. FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR. *De dos fracciones que tienen igual denominador es mayor la que tiene mayor numerador.*

Por ejemplo, es evidente que $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$.

II. FRACCIONES CON IGUAL NUMERADOR. *De dos fracciones que tienen igual numerador es mayor la que tiene menor denominador.*

Se comprende, por ejemplo, que dividida una tira de papel en 5 partes iguales o dividida en 9, una de las partes de la primera división será mayor que una de la segunda y, con mayor razón, 4 de las primeras componen una cantidad superior a 4 de las otras. Es decir:

$$\frac{4}{5} > \frac{4}{9}$$



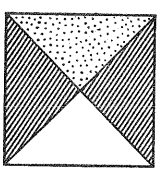
III. FRACCIONES CUALESQUIERA. *Para comparar fracciones cualesquiera se reducen a un común denominador y se comparan luego los numeradores.*

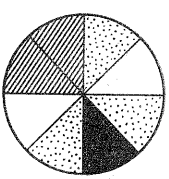
EJEMPLO. Ordenar de menor a mayor las fracciones: $\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{3}{7}$.

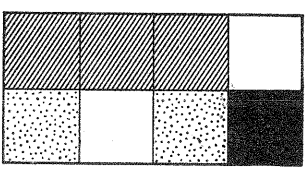
$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{5}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{3}{7} \\ \frac{126}{315}, \frac{140}{315}, \frac{135}{315} \end{array}\right\} \quad \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9}$$

EJERCICIOS

Observar las figuras adjuntas y contestar las preguntas siguientes:







199. ¿Qué fracción del cuadrado es blanca? ¿Qué parte está rayada? ¿Qué parte está punteada? ¿Qué parte del cuadrado no es blanca? ¿Qué parte no está rayada? ¿Qué parte no está punteada?

200. ¿Qué fracción del círculo es blanca? ¿Qué parte está rayada? ¿Qué parte está punteada? ¿Qué parte es negra? ¿Qué parte del círculo no es blanca? ¿Qué parte no está rayada? ¿Qué parte no está punteada? ¿Qué parte no es negra?

201. ¿Qué fracción del rectángulo es blanca? ¿Qué parte está rayada? ¿Qué parte está punteada? ¿Qué parte es negra? ¿Qué parte del rectángulo no es blanca? ¿Qué parte no está rayada? ¿Qué parte no está punteada? ¿Qué parte no es negra?

202. Dibujar tiras rectangulares de la misma longitud y señalar con un sombreado las fracciones: $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{6}{11}$.

203. En una vasija en la que caben 25 litros, se han echado 8 litros. ¿Qué fracción representa la parte de vasija ocupada por el líquido? ¿Y cuál la de la parte que queda por llenar?

204. Calcular las fracciones que se indican: $\frac{2}{3}$ de 150 Km; $\frac{5}{7}$ de 8.400 ptas.; $\frac{11}{13}$ de 1.950 litros; $\frac{4}{9}$ de 11.700 Kg.

205. ¿Cuál es la mayor fracción propia de denominador 17?

206. Teniendo en cuenta la propiedad fundamental de las fracciones, hállese el término que falta en las siguientes igualdades:

$$\frac{4}{5}=\frac{\cdot}{15};\quad \frac{35}{49}=\frac{\cdot}{7};\quad \frac{1}{3}=\frac{21}{\cdot};\quad \frac{17}{19}=\frac{34}{\cdot};\quad \frac{91}{117}=\frac{\cdot}{9}$$

207. Hallar seis fracciones equivalentes a $\frac{5}{6}$ de términos mayores a los de ésta. Ídem seis equivalentes a $\frac{1458}{5103}$ de términos menores.

208. Simplificar las fracciones: $\frac{15}{60}$; $\frac{27}{36}$; $\frac{16}{84}$; $\frac{30}{66}$; $\frac{72}{360}$.

209. En una clase de 36 alumnos, 24 tienen pluma estilográfica. Expresar en forma irreducible la fracción de la clase que tiene estilográfica.

210. Háganse irreducibles las fracciones: $\frac{16}{108}$; $\frac{385}{770}$; $\frac{56}{140}$; $\frac{324}{540}$; $\frac{1568}{588}$.

211. Amplificar las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$ y $\frac{7}{12}$, convirtiéndolas en otras equivalentes cuyos respectivos denominadores sean 9, 21, 36 y 60.

212. Reducir a un común denominador las fracciones de cada uno de los grupos siguientes:

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$; *b)* $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{8}$; *c)* $\frac{3}{4}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6}$; *d)* $\frac{4}{9}, \frac{7}{6}, \frac{13}{18}$

213. Ídem las fracciones de cada uno de los siguientes grupos:

a) $\frac{3}{5}, \frac{9}{12}, \frac{1}{4}, \frac{23}{60}$; *b)* $\frac{3}{8}, \frac{4}{5}, \frac{13}{21}, \frac{5}{11}$; *c)* $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{11}{45}$

214. Ordenar de menor a mayor las fracciones de cada uno de los grupos:

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$; *b)* $\frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{13}{21}, \frac{5}{11}$; *c)* $\frac{9}{13}, \frac{23}{27}, \frac{16}{35}, \frac{4}{9}$

215. Dibujar tiras rectangulares de la misma longitud y, mediante la representación de las fracciones que siguen, adquirir conocimiento práctico de su valor: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{4}{9}, \frac{7}{12}$.

14. Adición y sustracción de fracciones

99. Adición. — Para sumar fracciones es necesario que sean homogéneas; es decir, han de tener el mismo denominador. Los sumandos representan entonces conjuntos de unidades fraccionarias homogéneas, y la suma deberá contener el total de dichas unidades. Por consiguiente:

> **Para sumar fracciones de igual denominador se suman los numeradores y se pone el mismo denominador.**
> **Si las fracciones no tienen igual denominador, se reducen primero a un común denominador.**

EJEMPLOS:

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{3 + 1 + 5}{8} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{45 + 40 + 48}{60} = \frac{133}{60}$$

100. Número mixto. — Se llama número mixto a la suma indicada de un número entero y una fracción propia.

EJEMPLO: $3 + \frac{5}{8}$, que abreviadamente se escribe $3\,\frac{5}{8}$.

101. Conversión de una fracción impropia en número mixto. — Si una fracción es impropia, contendrá una o varias unidades, las cuales se obtienen dividiendo el numerador por el denominador.

Por ejemplo, $\frac{13}{5}$ contiene 2 unidades y sobran 3 quintos. Diremos, por tanto, que $\frac{13}{5} = 2\,\frac{3}{5}$.

102. Conversión de un número mixto en fracción impropia. — Sea el número mixto $5\frac{7}{9}$. Como cada unidad está formada por 9 novenos, las 5 unidades equivalen a $5 \times 9 = 45$ novenos, y al sumar los 7 que faltan por considerar, resultan 52 novenos. Luego:

$$5\frac{7}{9} = \frac{5 \cdot 9 + 7}{9} = \frac{52}{9}$$

> **Para reducir un número mixto a fracción se multiplica el entero por el denominador de la fracción, se añade al producto el numerador, y a la suma se le pone el denominador de la fracción.**

De acuerdo con la definición de número mixto, esta misma regla servirá para sumar un entero con una fracción.

103. Sustracción. — Siendo la resta la operación inversa de la suma, fácilmente se deduce la siguiente regla:

> **Para restar fracciones de igual denominador se restan los numeradores y se pone el mismo denominador.**
> **Si las fracciones no tienen igual denominador se reducen previamente a un común denominador.**

EJEMPLO: $\frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{42 - 40}{48} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$

Esta es, en efecto, la solución, ya que haciendo la prueba de la resta, resulta el minuendo:

$$\frac{1}{24} + \frac{5}{6} = \frac{1 + 20}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

104. Adición y sustracción de números enteros, fraccionarios y mixtos.

I. SUMA. Para sumar números enteros, fraccionarios y mixtos pueden reducirse primero los enteros y mixtos a fracciones impropias, *pero es*

preferible sumar separadamente los enteros y las fracciones y luego sumar los resultados obtenidos.

Si la fracción que resulta es impropia, se reduce a mixto y se agregan sus enteros a la suma de los que ya había.

EJEMPLO:

$$4\frac{5}{7} + 8 + \frac{2}{5} + 9\frac{1}{3} = 21 + \frac{75 + 42 + 35}{105} = 21 + 1\frac{47}{105} = 22\frac{47}{105}$$

II. RESTA. *Para restar números mixtos se reducen previamente a fracciones impropias.*

EJEMPLO:

$$8\frac{1}{3} - 5\frac{3}{4} = \frac{25}{3} - \frac{23}{4} = \frac{100 - 69}{12} = \frac{31}{12} = 2\frac{7}{12}$$

Cuando el minuendo o el sustraendo es un número entero, para hallar la diferencia se reduce el entero a fracción con igual denominador que la dada.

EJEMPLO:

$$12 - 7\frac{1}{3} = \frac{36}{3} - \frac{22}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

EJERCICIOS

OBSERVACIÓN. — **En todas las operaciones que se efectúen con fracciones es aconsejable que el resultado se simplifique todo lo posible y que si es una fracción impropia se reduzca a número mixto.**

Efectuar las siguientes adiciones:

216. $\frac{4}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{9}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{12}$; $\frac{2}{7} + \frac{3}{14} + \frac{1}{2}$

217. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$; $\frac{5}{6} + \frac{7}{18} + \frac{2}{3}$; $\frac{1}{4} + \frac{7}{8} + \frac{5}{16}$; $\frac{4}{11} + \frac{3}{5} + \frac{7}{10}$

218. $8\frac{4}{5} + 7\frac{2}{3}$; $6\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6}$; $3 + \frac{5}{9}$; $2\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + 4\frac{1}{2}$

219 $5\frac{2}{3}+7\frac{4}{9}+8\frac{5}{6}$; $1\frac{5}{7}+4\frac{3}{4}+3\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}+4+3\frac{1}{2}$

Efectuar las siguientes sustracciones:

220. $\frac{8}{9}-\frac{2}{3}$; $\frac{14}{15}-\frac{3}{4}$; $3\frac{4}{7}-2\frac{1}{2}$; $37\frac{4}{9}-26$; $83-54\frac{11}{12}$

221. $6\frac{2}{3}-\frac{15}{4}$; $9-4\frac{2}{3}$; $\frac{59}{7}-5\frac{4}{9}$; $1-\frac{23}{27}$; $\frac{19}{3}-2\frac{4}{5}$

Hallar el valor que han de tener las letras de las igualdades siguientes para que los resultados sean ciertos:

222. $\frac{2}{3}+A=1$; $\frac{4}{5}-B=\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}+C=\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}-D=\frac{1}{2}$

223. $\frac{1}{4}+E=\frac{3}{8}$; $\frac{5}{13}+F=\frac{12}{13}$; $\frac{5}{6}-G=\frac{2}{3}$; $H-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

Hallar el valor de las siguientes expresiones:

224. $\frac{3}{4}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}$; $\frac{5}{9}-\frac{2}{7}+\frac{2}{3}$; $1-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

225. $\frac{23}{5}-\left(2+\frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{5}{7}+\frac{4}{9}\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)$; $9-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)$

226. $\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{11}{3}-\frac{7}{9}\right)$; $3\frac{1}{4}+4\frac{2}{3}-2\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$

227. De una factura que debía he pagado primero la mitad y luego la tercera parte. ¿Qué fracción de la factura he pagado? ¿Qué fracción me queda por pagar?

228. Dadas las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{4}{9}$, se desea hallar la diferencia entre la suma de la mayor y la menor y la suma de las otras dos.

229. Una finca ha sido dividida en cuatro lotes; uno es $\frac{1}{3}$ de la finca, otro los $\frac{2}{9}$, y otro $\frac{1}{6}$. ¿Qué fracción de la finca corresponde al cuarto lote?

230. Un grifo puede llenar un depósito en 3 horas, otro lo hace en 4 horas, y un tercero en 6 horas. ¿Qué fracción de depósito llenarán en una hora los tres grifos abiertos a la vez? ¿Qué fracción quedará por llenar?

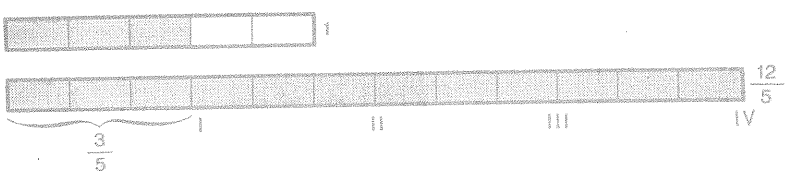
231 De una mercancía cuyo importe total asciende a 120.000 pesetas, se han hecho cuatro lotes. El primero vale $\frac{1}{3}$ del total, el segundo $\frac{1}{4}$ del total, y el tercero $\frac{1}{6}$ también del total. ¿Cuántas pesetas vale el cuarto lote?

15. Multiplicación y división de fracciones

105. Producto de una fracción por un entero. — Supongamos que se quiere hallar el producto $\frac{3}{5} \times 4$. Evidentemente, el resultado será la suma de 4 sumandos iguales a $\frac{3}{5}$; es decir:

$$\frac{3}{5} \times 4 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

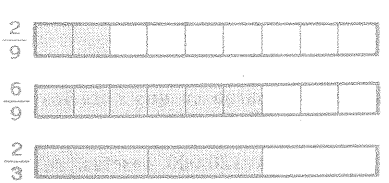
En la figura adjunta podemos ver comprobada la operación.



En general, enunciaremos la siguiente regla:

> **Para multiplicar una fracción por un entero se multiplica el numerador por el entero.**

CASO PARTICULAR: *El denominador de la fracción es múltiplo del número entero.* Sea, por ejemplo, la multiplicación



$$\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2 \times 3}{9}$$

El resultado puede simplificarse dividiendo por 3 a los dos términos de la fracción, por lo que resulta

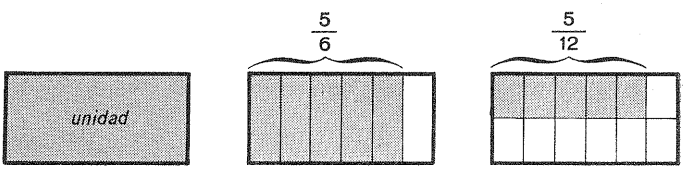
$$\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2 \times 3}{9} = \frac{2}{9:3} = \frac{2}{3}$$

Es decir: *Para multiplicar una fracción por un número entero divisor del denominador, basta dividir el denominador por el entero.*

Lo dicho está representado en el gráfico adjunto.

106. Cociente de una fracción por un entero. — Por el gráfico adjunto podemos comprobar que

$$\frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{6 \times 2} = \frac{5}{12}$$

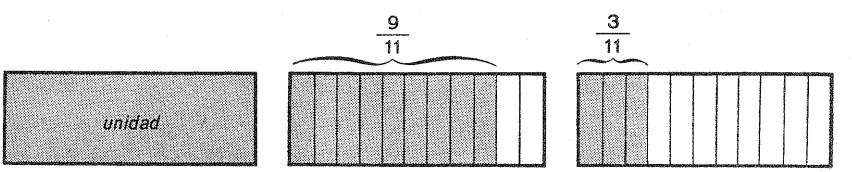


Para dividir una fracción por un entero se multiplica el denominador por el entero.

CASO PARTICULAR: *El numerador de la fracción es múltiplo del entero.* En este caso, para dividir la fracción por el entero bastará dividir el numerador por dicho entero. Por ejemplo:

$$\frac{9}{11} : 3 = \frac{9:3}{11} = \frac{3}{11}$$

La comprobación la podemos ver en el gráfico adjunto.



107. Producto de dos fracciones. — Tratemos de resolver el siguiente problema: *La velocidad media de un automóvil es de* $\frac{209}{3}$ *kilómetros por hora. Averiguar cuántos kilómetros recorre dicho automóvil en* $\frac{7}{4}$ *de hora.*

Si en vez de ser fraccionarios los números que intervienen en el problema fueran enteros, la solución se encontraría efectuando su producto. Por analogía diremos que los kilómetros recorridos por el mencionado automóvil vienen expresados por el producto

$$\frac{209}{3} \times \frac{7}{4}$$

Pero a esta multiplicación no la podemos aplicar la definición dada para los números naturales, puesto que el multiplicador no es un número natural. Tendremos que razonar del siguiendo modo:

Si el automóvil recorre $\frac{209}{3}$ Km/hora, en $\frac{1}{4}$ de hora recorrerá

$$\frac{209}{3} : 4 = \frac{209}{3 \times 4} \text{ Km}$$

y el espacio recorrido en 7 cuartos de hora será

$$\frac{209}{3 \times 4} \times 7 = \frac{209 \times 7}{3 \times 4} \text{ Km}$$

O sea que

$$\frac{209}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{209 \times 7}{3 \times 4}$$

En general, podemos enunciar:

> **Para multiplicar fracciones o fracciones y enteros, se multiplican los numeradores y enteros entre sí y los denominadores entre sí.**

EJEMPLOS: (Tal como indicamos en estos ejemplos, es conveniente hacer las posibles simplificaciones antes de efectuar los productos.)

$$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{4 \times 5}{9 \times 8} = \frac{1 \times 5}{9 \times 2} = \frac{5}{18}$$

$$\frac{3}{4} \times 5 \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 5 \times 2}{4 \times 7} = \frac{3 \times 5 \times 1}{2 \times 7} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$$

Si hay números mixtos, se reducen a fracciones impropias y se aplica la regla anterior. Así:

$$1\frac{3}{4} \times 5\frac{7}{9} = \frac{7}{4} \times \frac{52}{9} = \frac{7 \times 52}{4 \times 9} = \frac{364}{36} = 10\frac{1}{9}$$

$$3\frac{4}{5} \times \frac{7}{8} \times 6 \times 2\frac{3}{7} \times 9 = \frac{19}{5} \times \frac{7}{8} \times 6 \times \frac{17}{7} \times 9 =$$

$$= \frac{19 \times 7 \times 6 \times 17 \times 9}{5 \times 8 \times 7} = \frac{19 \times 1 \times 3 \times 17 \times 9}{5 \times 4 \times 1} = \frac{8721}{20} = 436\frac{1}{20}$$

108. Fracción de una fracción. — *Hallar una fracción de otra fracción equivale a obtener el producto de ambas.*

En efecto: Sea hallar los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$. Al tomar $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{7}$, hacemos a $\frac{5}{7}$ cuatro veces menor, y queda $\frac{5}{7 \times 4}$; y al tomar 3 de estas partes, resultará $\frac{5 \times 3}{7 \times 4}$.

EJEMPLO. Hallar los $\frac{4}{5}$ de los $\frac{2}{9}$ del quíntuplo de los $\frac{3}{8}$ de 2.160 ptas.

Obtendremos la solución de este modo:

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{9} \times 5 \times \frac{3}{8} \times 2160 = \frac{4 \times 2 \times 5 \times 3 \times 2160}{5 \times 9 \times 8} = 720 \text{ ptas.}$$

EJERCICIOS

Calcular los productos siguientes y simplificar los resultados si es posible:

232. $\frac{3}{5} \times 7$; $\frac{7}{12} \times 5$; $6 \times \frac{4}{9}$; $19 \times \frac{1}{3}$; $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8}$

233. $\frac{5}{36} \times 18$; $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$; $3 \times \frac{2}{5}$; $9\frac{2}{7} \times 6$; $6 \times \frac{5}{12}$

234. $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{7}$; $\frac{2}{5} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{11}$; $5 \times \frac{3}{7} \times 8$; $3 \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{30}$

235. $2\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}$; $\frac{7}{13} \times 3\frac{4}{5}$; $\frac{5}{12} \times 4\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{5}$; $4\frac{2}{11} \times \frac{5}{6} \times 3$

236. $7\frac{3}{5} \times 5\frac{1}{3} \times \frac{9}{11}$; $16\frac{1}{2} \times \frac{8}{9} \times 4\frac{3}{5}$; $20\frac{1}{2} \times 12\frac{1}{5} \times 9\frac{3}{7} \times 14$

237. Hallar los cocientes indicados:

$$\frac{7}{8}:3; \quad \frac{12}{19}:8; \quad \frac{36}{37}:6; \quad \frac{5}{12}:25; \quad \frac{48}{63}:12$$

238. Calcular las siguientes expresiones:

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right); \qquad \left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(5-\frac{1}{2}\right);$$

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)\times\left(2\frac{1}{2}+6\frac{4}{5}+5\frac{1}{10}\right)$$

239. El consumo diario de vino que hace una familia es de 1 litro $\frac{3}{4}$. ¿Qué cantidad de vino les quedará en un barril de 90 litros al cabo de 29 días de haberlo comenzado?

240. ¿Cuál es la longitud total de dos filas paralelas de árboles, si en cada fila hay 178 árboles y la distancia de uno al siguiente es de $4\frac{1}{2}$ metros?

241. Una cuerda de $12\frac{1}{4}$ metros se ha dividido en tres partes iguales. ¿Cuál es la longitud total de dos de esas partes?

242. ¿Cuánto valen 55 paquetes de café de $\frac{1}{4}$ de kilo cada uno, si el kilo se paga a 110 pesetas?

243. ¿Cuántos litros de vino se podrán poner en 7 docenas de botellas de $\frac{3}{4}$ de litro cada una?

244. Para transportar cierta cantidad de arena, la carretilla de Juan debería hacer 20 viajes, mientras que la de Pedro, por ser menor, necesitaría 30. ¿Cuántos viajes serán precisos si se contrata a los dos para que hagan juntos los viajes?

245. Se han vendido los $\frac{6}{11}$ de una pieza de tela y luego los $\frac{3}{5}$ del resto. ¿Qué fracción de la pieza queda todavía por vender? Si esta fracción que queda corresponde a 20 metros, ¿qué longitud tenía la pieza?

246. Un obrero realiza una obra en 10 días, otro la hace en 15 y otro en 12 días. ¿Qué fracción de obra harán en un día trabajando los tres juntos? ¿Cuánto tardarán en concluir la obra?

247. Una persona que va de compras, gasta primero los $\frac{3}{7}$ de su dinero, después $\frac{1}{2}$ del resto y finalmente $\frac{1}{2}$ del nuevo resto. Le quedan entonces 25 ptas. ¿Cuánto tenía al principio? ¿Cuánto gastó en cada compra?

16. Multiplicación y división de fracciones (continuación)

109. Números recíprocos. — Llámase *recíproco* o *inverso* de un número a otro número cuyo producto por el primero es igual a la unidad.

EJEMPLOS. Por ser

$$3 \times \frac{1}{3} = 1, \qquad \frac{5}{9} \times \frac{9}{5} = 1, \qquad 10 \times 0'1 = 1,$$

diremos que $\frac{1}{3}$, $\frac{9}{5}$ y 0'1 son, respectivamente, los inversos de 3, $\frac{5}{9}$ y 10; o, viceversa, que 3, $\frac{5}{9}$ y 10 son, respectivamente, los inversos de $\frac{1}{3}$, $\frac{9}{5}$ y 0'1.

El inverso de un número entero e es la fracción $\frac{1}{e}$; la inversa de una fracción $\frac{n}{d}$ es la fracción $\frac{d}{n}$. Para hallar el inverso de un número mixto se reduce primero a fracción impropia.

110. División de un número entero o fraccionario por una fracción. — Tratemos de resolver el siguiente problema: *Un recipiente contiene* $\frac{72}{5}$ *de litro de vino. ¿Cuántas botellas de* $\frac{3}{4}$ *de litro podremos llenar con el vino contenido en dicho recipiente?*

Evidentemente, el número de botellas será

$$\frac{72}{5} : \frac{3}{4}$$

Para hallar el resultado, razonemos así: Si las botellas fueran de cuarto de litro, con un litro llenaríamos 4 botellas, y con $\frac{72}{5}$ litros:

$$\frac{72}{5} \times 4 = \frac{72 \times 4}{5}$$

Pero como las botellas son de 3 cuartos, el número de éstas que se pueden llenar será 3 veces menos; o sea:

$$\frac{72 \times 4}{5} : 3 = \frac{72 \times 4}{5 \times 3}$$

En definitiva, resulta que

$$\frac{72}{5} : \frac{3}{4} = \frac{72}{5} \times \frac{4}{3}$$

Igual hubiéramos razonado si el dividendo fuera un número entero, por lo que, en general, podemos enunciar:

Para dividir un número entero o fraccionario por una fracción, se multiplica el dividendo por la fracción inversa del divisor.

EJEMPLOS:

$$\frac{8}{9} : \frac{5}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{8 \times 7}{9 \times 5} = \frac{56}{45}$$

$$6 : \frac{3}{11} = 6 \times \frac{11}{3} = \frac{6 \times 11}{3} = 22$$

Si hay números mixtos, se reducen a fracciones impropias.

$$\frac{5}{4} : 2\frac{1}{8} = \frac{5}{4} : \frac{17}{8} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{17} = \frac{5 \times 8}{4 \times 17} = \frac{10}{17}$$

$$4\frac{2}{3} : 3\frac{1}{4} = \frac{14}{3} : \frac{13}{4} = \frac{14}{3} \times \frac{4}{13} = \frac{56}{39}$$

111. Cociente exacto de dos números enteros.— Con el estudio hecho de las fracciones, siempre es posible expresar el cociente exacto de dos números enteros, aun cuando el dividendo no sea múltiplo del divisor.

Por ejemplo, el cociente exacto de dividir 37 por 12 es $\frac{37}{12}$, y para demostrarlo basta hacer la prueba de la división:

$$\textit{Divisor} \times \textit{cociente} = 12 \times \frac{37}{12} = \frac{12 \times 37}{12} = 37 = \textit{dividendo}$$

> **El cociente exacto de dos números enteros cualesquiera puede estar representado por una fracción cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor.**

112. Propiedades de las operaciones con números fraccionarios.— Las operaciones con números fraccionarios tienen las mismas propiedades que las operaciones con números naturales. Compruébense en los siguientes ejemplos.

I. Propiedad *conmutativa* de la suma y de la multiplicación:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{3}{5}; \qquad \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3}$$

II. *Asociativa* y *disociativa* de la suma y de la multiplicación:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + 5\frac{1}{6} + \frac{7}{12} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) + \left(5\frac{1}{6} + \frac{7}{12}\right)$$

$$2\frac{4}{5} \times 5 \times 9\frac{3}{7} \times \frac{3}{8} \times 2 = \left(2\frac{4}{5} \times 9\frac{3}{7} \times \frac{3}{8}\right) \times (5 \times 2)$$

III. *Distributiva* de la multiplicación respecto de la suma y de la diferencia:

$$\left(\frac{7}{9} + \frac{2}{3} + \frac{5}{8}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{7}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{8}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} - \frac{3}{8} \times \frac{4}{5}$$

113. Conversión de una fracción ordinaria en decimal. — Al operar con fracciones es conveniente muchas veces sustituirlas por números decimales equivalentes. Ahora bien: como una fracción representa el cociente del numerador por el denominador, el problema que ahora estudiamos se reduce a la aplicación de la regla dada para hallar el cociente decimal de dos números naturales.

> **Para convertir una fracción ordinaria en decimal, se halla el cociente decimal del numerador por el denominador, exactamente o, de no ser posible, con la aproximación que convenga.**

EJEMPLOS. Convertir en decimales las fracciones $\frac{2}{5}$, $\frac{31}{8}$ y $\frac{5}{6}$.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ 0 & 0'4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & 8 \\ 70 & 3'875 \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ 20 & 0'833 \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Luego: $\frac{2}{5} = 0'4$; $\frac{31}{8} = 3'875$; $\frac{5}{6} = 0'833$ (aproximado hasta las milésimas).

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes divisiones:

248. $\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$; $\frac{7}{9} : \frac{2}{3}$; $8 : \frac{6}{7}$; $3\frac{4}{5} : 2\frac{7}{15}$; $\frac{5}{4} : 1\frac{3}{8}$

249. $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$; $21 : \frac{3}{7}$; $\frac{11}{7} : \frac{5}{28}$; $7\frac{2}{9} : 3\frac{11}{18}$; $5\frac{2}{3} : 3\frac{7}{9}$

Hallar el resultado de las siguientes operaciones:

250. $\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{5}\right) : \frac{8}{15}$; $\left(2\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) : \frac{4}{9}$; $\left(3\frac{2}{9} - 1\frac{5}{11}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

251. $\left(5 - 3\frac{1}{3}\right) : \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{5}{9}\right)$; $\left(4\frac{1}{3} - 1\frac{5}{6}\right) : \left(5\frac{2}{3} - 4\frac{1}{2}\right)$

252. $\frac{2}{7} : \frac{4}{5} + \frac{3}{14} : 2 + 1 : \frac{2}{3} - 2\frac{1}{4} : 3\frac{1}{3} - 1 : 1\frac{17}{23}$

Convertir en decimales las siguientes fracciones ordinarias:

253. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{29}{12}$; $\frac{7}{32}$

254. $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{16}$; $13\frac{2}{5}$; $\frac{60}{9}$; $4\frac{21}{44}$; $\frac{5}{12}$; $6\frac{8}{13}$

255. Al multiplicar un número por $\frac{4}{9}$ se obtiene $\frac{20}{3}$. ¿Cuál es ese número?

256. ¿Cuántos paquetes de $1\frac{3}{4}$ kilogramos se pueden hacer con $82\frac{1}{4}$ kilogramos de café?

257. Una persona compró por 23.400 ptas. un comedor y un aparato de televisión. Sabiendo que el comedor vale los $\frac{4}{9}$ del precio del aparato de televisión, ¿cuánto valdrá el comedor y cuánto el aparato?

258. La diferencia de precios entre un pantalón y una camisa es de 96 ptas. La camisa vale los $\frac{3}{7}$ del precio del pantalón. ¿Cuánto vale el pantalón y cuánto la camisa?

259. Una persona ha gastado los $\frac{2}{5}$ de lo que tenía. Recuerda que los $\frac{2}{7}$ de lo que tenía eran 140 ptas. ¿Cuánto fue lo gastado?

260. Un obrero gasta en alimentarse $\frac{1}{3}$ de lo que gana; en vestirse, $\frac{1}{4}$; en calzarse, $\frac{1}{6}$, y le quedan 3.000 ptas. al año. ¿Cuánto gana anualmente?

261. Una octava parte de los alumnos de un colegio no pueden ir de excursión. Concertada ésta, los $\frac{3}{5}$ de los alumnos que pensaban ir no son autorizados por sus padres. Finalmente, el día del viaje pierden el tren $\frac{1}{21}$ de los que quedaban, resultando que sólo van 80. ¿Cuántos alumnos tenía el colegio?

262. Cada vez que cae al suelo una pelota rebota los $\frac{3}{5}$ de la altura de que ha caído. Si se la deja caer desde una altura de 12 metros, ¿a qué altura llegará después del tercer bote?

17. La regla de tres simple

114. Magnitudes directamente proporcionales. — Vamos a comparar diversos volúmenes de una sustancia y sus pesos respectivos.

Si suponemos, por ejemplo, que 3 dm^3 pesan 5 Kg, podemos establecer la siguiente correspondencia:

Volúmenes:	3 dm^3	6 dm^3	9 dm^3	12 dm^3	...
Pesos:	5 Kg	10 Kg	15 Kg	20 Kg	...

Se observa fácilmente que a cada volumen corresponde un solo peso y que, cuando el volumen se hace 2, 3, 4, ... veces mayor, el peso correspondiente se hace también 2, 3, 4, ... veces mayor.

Esto nos indica que *los volúmenes de una sustancia son directamente proporcionales a los pesos respectivos.*

En general, diremos:

> **Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando a cada cantidad de una le corresponde una sola cantidad de la otra; de tal modo que, si hacemos a una de esas cantidades 2, 3, 4, ... veces mayor, la cantidad correspondiente de la otra magnitud se hace también 2, 3, 4, ... veces mayor.**

OTROS EJEMPLOS DE MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES.

I. *Los kilómetros recorridos y el precio del viaje.*

Si suponemos, por ejemplo, que un viaje de 25 Km cuesta 12 ptas., podremos establecer la siguiente correspondencia entre los valores de esas dos magnitudes:

Kilómetros:	25 Km	50 Km	75 Km	100 Km	...
Precio:	12 ptas.	24 ptas.	36 ptas.	48 ptas.	...

A cada cantidad de kilómetros le corresponde una cantidad de pesetas y, además, cuando el número de kilómetros se hace 2, 3, 4, ... veces mayor, el precio del viaje se hace también 2, 3, 4, ... veces mayor. Luego las magnitudes consideradas son directamente proporcionales.

II. *El peso de una mercancía y su coste.*

Si suponemos, por ejemplo, que el precio de un kilogramo de arroz son 9'50 ptas., podremos establecer la siguiente correspondencia entre los valores de las magnitudes *peso* del arroz y el *coste* del mismo:

1 Kg	2 Kg	3 Kg	4 Kg	5 Kg	...
9'50 ptas.	19 ptas.	28'50 ptas.	38 ptas.	47'50 ptas.	...

en la que se cumplen las dos condiciones expresadas en la definición de magnitudes directamente proporcionales.

115. Regla de tres simple directa. — Se llama *regla de tres simple directa* el procedimiento por el cual se resuelven los problemas en que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales.

Decimos regla de tres porque en tales problemas se dan *tres* cantidades, de las cuales dos son correspondientes, una de cada magnitud, y se trata de hallar la cantidad correspondiente a la tercera.

PROBLEMA. — *Se han pagado* 285 *pesetas por* 6 *metros de tela. ¿Cuánto habría que abonar por* 15 *metros?*

Para hallar la solución, razonaremos así:

Si por 6 metros se han pagado 285 ptas.

por 1 metro se pagarían ... $\frac{285}{6}$ ptas.

y por 15 metros ..... $\frac{285}{6} \times 15 = 712'50$ ptas.

116. Magnitudes inversamente proporcionales. — Comparemos las velocidades y los tiempos empleados por un móvil en recorrer un determinado trayecto.

Supongamos, por ejemplo, que un tren ha empleado 6 horas en recorrer la distancia entre dos poblaciones, llevando una velocidad uniforme de 40 Km por hora.

Cuantas veces recorra ese trayecto, con igual velocidad, invertirá el mismo tiempo, y si la velocidad fuera de 80 Km por hora ($80 = 40 \times 2$), el tiempo invertido serían 3 horas ($3 = 6 : 2$). Por el contrario, marchando a la velocidad de 20 Km por hora ($20 = 40 : 2$), el tiempo empleado serían 12 horas ($12 = 6 \times 2$).

Vemos, por consiguiente, que al multiplicar o dividir la velocidad por un número, el tiempo queda, respectivamente, dividido o multiplicado por ese mismo número.

Según esto, podemos establecer la siguiente correspondencia:

Velocidades:	80 Km/h.	60 Km/h.	40 Km/h.	20 Km/h.	...
Tiempos:	3 h.	4 h.	6 h.	12 h.	...

Se observa fácilmente que a cada velocidad corresponde un solo tiempo y que, cuando la velocidad se hace 2, 3, ... veces mayor, el tiempo empleado se hace 2, 3, ... veces menor.

Esto nos dice que *las velocidades con que se recorre un trayecto y los tiempos empleados son inversamente proporcionales.*

En general, diremos:

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando a cada cantidad de una le corresponde una sola cantidad de la otra; de tal modo que si hacemos a una de esas cantidades 2, 3, 4, ... veces mayor, la cantidad correspondiente de la otra magnitud se hace 2, 3, 4, ... veces menor.

OTRO EJEMPLO DE MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES:

El tiempo empleado y el número de obreros necesarios para realizar un trabajo.

Si suponemos, por ejemplo, que 12 hombres efectúan un determinado trabajo en 8 horas, 6 hombres harían el mismo trabajo en 16 horas, 4 hombres en 24 horas, 3 hombres en 32 horas, etc. Se tiene, por tanto, la siguiente correspondencia entre los valores de las dos magnitudes: *número de hombres y tiempo empleado:*

12 hombres	6 hombres	4 hombres	3 hombres	...
8 horas	16 horas	24 horas	32 horas	...

en la que se cumplen las dos condiciones exigidas para que dos magnitudes sean inversamente proporcionales.

117. Regla de tres simple inversa. — *Regla de tres simple inversa* es el procedimiento por el cual se resuelven los problemas en que intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales.

PROBLEMA 1.° *Si* 12 *operarios realizan un trabajo en* 45 *días, ¿cuántos días emplearán* 18 *operarios para hacer la misma obra, suponiendo que se dan las mismas condiciones e idéntica destreza?*

Razonaremos así:

Si 12 obreros terminan el trabajo en 45 días
1 obrero lo terminará en ..... $45 \times 12 = 540$ días
y 18 obreros lo terminarán en ..... $\frac{540}{18} = 30$ días.

PROBLEMA 2.° *Con cierta cantidad de dinero, una persona puede costearse su estancia en un hotel durante* 27 *días, pagando a razón de* 70 *pesetas diarias. ¿Cuántos días podría permanecer, disponiendo de la misma cantidad, en un hotel cuya pensión es de* 126 *pesetas?*

La estancia de 27 días, a razón de 70 ptas. diarias, importa un gasto de $27 \times 70 = 1.890$ ptas. Por tanto, en un hotel cuya pensión sea de 126 pesetas podría permanecer

$$1.890 : 126 = 15 \text{ días}$$

118. Problemas de cambio de unidad. — Ya hemos visto al estudiar el sistema métrico algunos ejercicios de cambio de unidad. Presentamos ahora dos clases de problemas que se dan con mucha frecuencia en la vida práctica.

I. *¿Cuántas pesetas nos darán por* 145 *libras esterlinas, suponiendo que el cambio está a* 167'20 *pesetas?*

Razonaremos así:

Si una libra esterlina equivale a 167'20 ptas., las 145 equivaldrán a

$$145 \times 167'20 = 24.244 \text{ ptas.}$$

Este problema corresponde al caso general siguiente: *Expresar una cantidad en una nueva unidad, cuando se conoce la equivalencia de la primera unidad con respecto a la segunda. Para resolverlo, se multiplica la cantidad dada por la equivalencia.*

EJEMPLO. ¿Cuántos centímetros son 12 pulgadas, si una pulgada es igual a 25'4 mm?

Solución: 12 pulgadas = 12 × 2'54 = 30'48 cm.

II. *¿Cuántos marcos alemanes podremos comprar con* 5.800 *ptas., si el marco se paga a* 14'95 *ptas.?*

El número de marcos que nos den será igual al número de veces que 14'95 esté contenido en 5.800; es decir,

$$5.800 : 14'95 = 387'95 \text{ marcos}$$

El problema corresponde al caso general siguiente: *Expresar una cantidad en una nueva unidad, cuando se conoce la equivalencia de la segunda unidad respecto de la primera. Para resolverlo, se divide la cantidad dada por la equivalencia.*

EJEMPLO. *¿Cuántas millas marinas son* 140'752 *Km, sabiendo que la milla marina equivale a* 1.852 *metros?*

Solución: 140'752 Km = 140.752 : 1.852 = 76 millas marinas.

EJERCICIOS

En los casos siguientes, dígase si las magnitudes son directa o inversamente proporcionales:

263. 1. Los pesos de una mercancía y sus valores.
2. Los espacios recorridos y los tiempos empleados, en el movimiento uniforme.
3. Los tiempos empleados y los obreros necesarios para realizar un trabajo.
4. Las distintas cantidades de agua que puede arrojar un grifo y los intervalos de tiempo necesarios para llenar un depósito.
5. Los individuos que participan en un reparto y la cantidad que corresponde a cada uno, cuando se distribuye una cantidad fija.

264. 1. Los distintos números de personas y las cantidades de alimentos que se necesitan.
2. Los distintos números de personas y los días que dura una determinada cantidad de provisiones.
3. Las cantidades de gasolina consumida por un automóvil y los kilómetros recorridos.
4. Los pesos del azúcar extraído y los pesos de la remolacha de que se extrae.
5. Los distintos números de botellas que pueden llenarse con el contenido de un recipiente y las distintas capacidades que puede tener una botella.

265. Si por los jornales de una semana (7 días) recibió un obrero 547'40 ptas., ¿cuánto recibirá por 32 jornales?

266. Si 6 kilogramos de café cuestan 594 ptas., ¿cuánto costarán 19 Kg?

267. Un comerciante pagó 13.431'20 ptas. como importe de 412 metros de cierta clase de tela. ¿Cuántos metros de esa misma tela hubiera podido adquirir por 13.692 pesetas?

268. Un comerciante concede una rebaja de 7 ptas. por cada 100 de compra. ¿Cuánto rebajará en una compra de 830 ptas.?

269. En una tienda se vende la docena de huevos a 31 ptas. ¿Cuánto costarán 100 huevos?

270. Un tren que marcha a 70 Km/h. ha recorrido cierta distancia en 20 minutos. ¿Cuánto tiempo emplearía en recorrer esa misma distancia, si la velocidad fuera 56 Km/h.?

271. Dos señoras entran en una tienda a comprar garbanzos. Una compra 23 kilogramos y la otra 18. Sabiendo que la primera pagó 36 ptas. más que la segunda, se desea hallar lo que pagó cada una.

272. Si 25 Hl 42 litros de vino han costado 12.201'60 ptas., ¿cuánto costará el vino que puede contener un depósito de 7'8 m^3 de volumen?

273. Para hacer una obra en 15 días se han empleado 32 obreros. ¿Cuántos obreros se necesitarían para hacer la misma obra en 24 días?

274. Una persona compró 65 Kg de azúcar a 12'40 ptas. el Kg. ¿Cuántos kilogramos hubiera podido comprar con el mismo dinero, si el azúcar estuviera a 12 ptas. el kilogramo?

275. En una fábrica se iba a repartir cierta cantidad entre 124 de sus empleados. De haberlo hecho así, a cada obrero le habrían correspondido 207 ptas. Pero a última hora se vio que eran 138 los obreros que tenían derecho al reparto. ¿Cuánto corresponderá a cada uno?

276. El realizar un trabajo le ha llevado a una persona 36 días, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días habría empleado, si hubiera trabajado diariamente una hora más?

277. Para embotellar el vino contenido en un tonel, se han necesitado 320 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro cada una. Si las botellas hubieran sido de 0'8 litros cada una, ¿cuántas se habrían llenado?

278. Averiguar cuántas pesetas costará un reloj que en Londres ha valido 7'50 libras esterlinas. (1 libra = 167'20 ptas.).

279. ¿Cuántos litros son 18 Kg de aceite, sabiendo que el litro de aceite pesa 0'915 Kg?

280. ¿Cuántos metros son 23 pies, si el pie equivale a 350 milímetros?

281. Un dólar cuesta 59'80 ptas. y 100 escudos portugueses 209 ptas. ¿Cuántos escudos necesitamos para comprar 25 dólares?

282. ¿Cuántos metros son 16 yardas inglesas, si una yarda equivale a 91'44 cm?

283. Averiguar a cuántos Hl equivalen 120 galones ingleses, sabiendo que un galón equivale a 4'543 litros? Reducir a galones 200 Hl.

18. La recta y el segmento. El plano

119. Cuerpo geométrico, superficie, línea, punto.— Fijemos bien la atención en un objeto cualquiera, como por ejemplo una caja, una bola de billar, un rodillo (fig. 14). Retiremos luego dicho objeto y tratemos de reproducir exactamente con el pensamiento la parte de espacio que ocupaba, es decir, su forma, longitud, anchura, altura, ... Este concepto o idea del objeto, en el que no se tiene en cuenta para nada la materia de que está hecho, es lo que llamamos *cuerpo geométrico.* De este modo lo distinguimos del cuerpo físico o material (fig. 15).

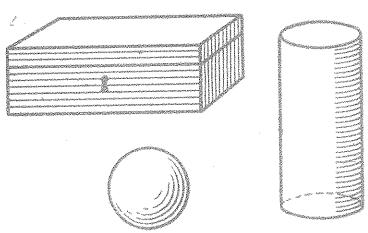


FIG. 14

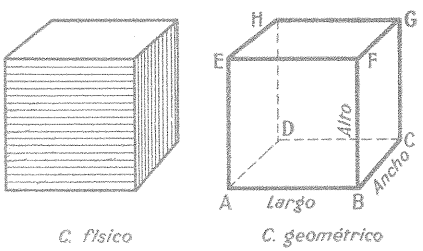


FIG. 15

Un cuerpo está separado del resto del espacio por *superficies.* La intersección de dos superficies es una *línea,* y la intersección de dos líneas es un *punto.*

Todo conjunto de puntos, líneas y superficies constituye una *figura geométrica.* La *Geometría* estudia las figuras geométricas y sus propiedades.

120. La recta, la semirrecta y el segmento.— Un hilo bien tirante nos da idea de la *línea recta.* La recta es ilimitada. Se designa por una letra minúscula, o bien, nombrando dos de sus puntos. Así, diremos: la recta *r,* o la recta *AB* (fig. 16).

FIG. 16

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. — **Por dos puntos pasa una recta y solamente una. O, también: Dos puntos determinan una recta y sólo una.**

Por tanto, dos rectas no pueden tener más que un punto común. Dos rectas que tuvieran dos puntos comunes serían una sola.

Haciendo coincidir el borde rectilíneo de una regla con los puntos *A* y *B* y deslizando la punta afilada de un lápiz, obtenemos la recta *AB*, determinada por esos dos puntos (fig. 17).

FIG. 17

Para efectuar alineaciones en el terreno, se emplean *jalones* o postes (figura 18). Primero se colocan los que determinan la recta que interesa (*A* y *B* en la figura) y luego los intermedios, de modo que, enfilándolos mediante una visual, se vean todos como uno solo.

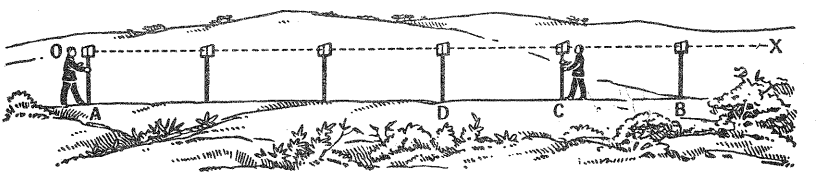


FIG. 18

Si marcamos un punto *O* en una recta *AB* (fig. 19), a partir de este punto, la recta se extiende indefinidamente en dos *sentidos*, uno a cada lado del punto.

FIG. 19

SEMIRRECTA *es la porción de recta que se extiende en un solo sentido, a partir de un punto, llamado origen de la semirrecta.*

Ejemplo: la semirrecta AB (fig. 20).

FIG. 20

FIG. 21

SEGMENTO *es la porción de recta limitada en los dos sentidos por dos puntos, llamados extremos del segmento.*

Ejemplo: el segmento AB (fig. 21).

121. Igualdad y desigualdad de segmentos. — Dos segmentos son *iguales* cuando se pueden colocar el uno sobre el otro de modo que los extremos coincidan. Así, el segmento AB es igual al CD (fig. 22), lo cual se representa escribiendo la igualdad $AB = CD$.

FIG. 22

FIG. 23

De dos segmentos AB y CD (fig. 23), decimos que el primero es *mayor* que el segundo, o que éste es *menor* que aquél, si al llevar el uno sobre el otro, de modo que coincidan los extremos A y C, el extremo D cae dentro del segmento AB. Esto lo representamos escribiendo la desigualdad

$$AB > CD \quad \text{o su equivalente} \quad CD < AB$$

122. Portasegmentos. — El problema gráfico más sencillo en Geometría es el de transportar segmentos. Se resuelve con ayuda de un *portasegmentos*, que puede estar constituído sencillamente por un papel doblado. Se marcan en él los extremos del segmento AB (fig. 24) que se

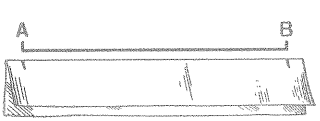


FIG. 24

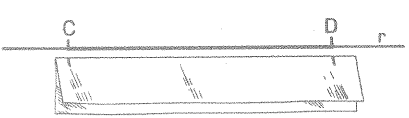


FIG. 25

quiere transportar y se llevan sobre la recta *r* que ha de servir de soporte, obteniendo así el segmento *CD*, igual al *AB* (fig. 25).

También puede emplearse como portasegmentos una regla, en especial si está graduada. Cuando se trata de transportar segmentos grandes se usan cordeles o hilos tirantes; y si los segmentos son pequeños se emplea el *compás*, que consta de dos piezas articuladas, una de ellas terminada en punta afilada, y la otra en un portalápices o en un tiralíneas (figura 26).

El empleo del portasegmentos se basa en que *dos segmentos iguales a un tercero son iguales entre sí.*

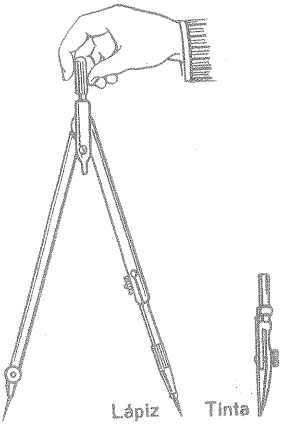


FIG. 26

123. Segmentos consecutivos. Adición de segmentos. — Dos segmentos colocados uno a continuación de otro, de modo que tengan un extremo común, se llaman *consecutivos*. Ejemplo: los segmentos *AB* y *BC* (fig. 27).

FIG. 27

Para *sumar* varios segmentos *a*, *b* y *c* (fig. 28) se colocan sobre una recta de modo que cada uno sea consecutivo con el siguiente. El segmento *AB*, determinado por el extremo *A* del primero y por el extremo *B* del último será la suma pedida: $AB = a + b + c$.

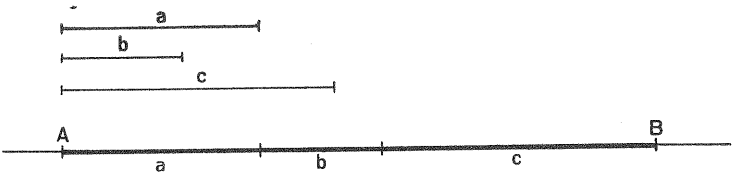


FIG. 28

124. Sustracción de segmentos. — Diferencia entre dos segmentos a y b es un segmento AB que sumado con b da a (fig. 29).

Para restar dos segmentos se coloca el menor sobre el mayor, de modo que coincidan dos de sus extremos; el segmento diferencia será el determinado por los extremos no comunes: $AB = a - b$.

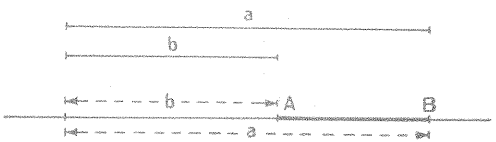


FIG. 29

125. Multiplicación de un segmento por un número natural. — Sea el segmento a que queremos multiplicar por el número natural 4. Para ello, bastará repetir dicho segmento cuatro veces como sumando (fig. 30):

$$AB = a + a + a + a = 4a$$

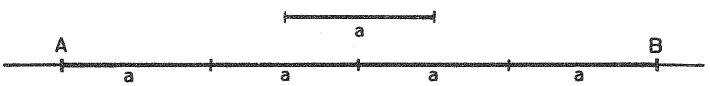


FIG. 30

126. El plano. Propiedad fundamental. — La más sencilla de las superficies es la plana o *plano*. Las paredes de una habitación, las aguas tranquilas de un estanque, una hoja de papel, etc., nos dan idea de plano. El plano se distingue de las demás superficies por la siguiente

> PROPIEDAD FUNDAMENTAL. — **Una recta que tiene dos puntos comunes con un plano, está toda ella contenida en él.**

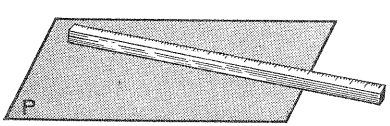


FIG. 31

De ahí que el medio práctico para reconocer si una superficie es plana consiste en aplicarle en varias direcciones el borde de una regla y ver si existe entre ellas perfecta coincidencia (fig. 31). Esto es lo que hace el al-

bañil cuando embaldosa una habitación, o el carpintero al colocar el tablero de una mesa.

Para representar un plano se hace convencionalmente por un paralelogramo. Se le nombra con una letra; el plano *P*, por ejemplo.

Las figuras geométricas que estudiaremos en este curso tienen todos sus puntos en un mismo plano. Por eso se llaman *figuras planas*, y la parte de la Geometría que las estudia, *Geometría plana.*

127. Semiplano. — Una recta trazada en un plano divide a éste en dos regiones indefinidas llamadas *semiplanos* (fig. 32).

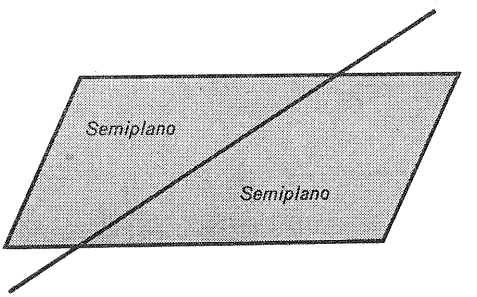


FIG. 32

EJERCICIOS

284. Explicar la diferencia entre un cuerpo físico y un cuerpo geométrico.

285. Citar ejemplos de cuerpos, superficies, líneas y puntos en la clase.

286. Señalar en la clase 5 cuerpos, 5 superficies, 5 líneas y 5 puntos.

287. Trazar rectas a pulso en el papel y en la pizarra.

288. Marcar dos puntos en el papel, o en la pizarra, y trazar la recta que pasa por ellos, primero a pulso y luego con una regla.

289. Obtener una recta haciendo un doblez en una cartulina o papel.

290. Valiéndose de un cordel, marcar varias rectas en el patio del colegio.

291. Efectuar alineaciones en el patio y medir luego dichas alineaciones.

292. Dibujar semirrectas y segmentos, poner las letras necesarias y nombrar luego las líneas.

293. Trazar dos segmentos y efectuar su suma. Restar luego el menor del mayor.

294. Trazar los segmentos $a = 2$ cm, $b = 4$ cm y $c = 5$ cm. Hallar gráficamente la suma $a + b + c$.

295. Trazar los segmentos $a = 67$ mm y $b = 42$ mm. Hallar gráficamente la diferencia $a - b$.

296. Trazar el segmento $a = 28$ mm y hallar luego gráficamente otro segmento igual a $3\,a$.

297. Dados dos segmentos, $a = 15$ mm y $b = 18$ mm, hallar el segmento igual a: 1.º, $a + 2\,b$; 2.º, $2\,b + a$; 3.º, $3\,a + 2\,b$; 4.º, $2\,a + 4\,b$.

298. Dados tres segmentos, $a = 14$ mm, $b = 16$ mm y $c = 9$ mm, hallar el segmento igual a: 1.º, $a + b + c$; 2.º, $2\,a + b + 2\,c$; 3.º, $a + 3\,b + 2\,c$.

299. En la figura 1, el segmento AB es igual a 12 cm, y el punto C está colocado de modo que $AC = 2\,CB$. Calcular la longitud de AC y de CB.

FIG. 1

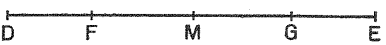


FIG. 2

300. En el segmento DE (fig. 2), los puntos F y G están colocados de modo que $DF = GE$. Además, M es el punto medio de FG. Probar que $DM = ME$.

301. En el segmento OI (figura 3), M es el punto medio de HI. Probar que $OM = \dfrac{OH + OI}{2}$.

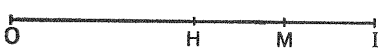


FIG. 3

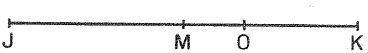


FIG. 4

302. En el segmento JK (figura 4), M es el punto medio. Probar que $OM = \dfrac{OJ + OK}{2}$.

303. ¿Cuál es la propiedad característica del plano? Valiéndose de una regla, comprobar dicha propiedad en distintos planos de la clase.

304. Representar planos en distintas posiciones.

19. Las magnitudes angulares

128. Ángulo. — Si en una hoja de papel trazamos dos semirrectas que partan de un mismo punto (fig. 33) y cortamos luego el papel según esas semirrectas, obtendremos dos trozos, que representan las dos regiones en que ha quedado dividido el plano. Cada una de estas regiones decimos que es un *ángulo.*

> **Ángulo es la porción indefinida de plano limitada por dos semirrectas que parten de un mismo punto.**

Las semirrectas se llaman *lados* del ángulo, y el punto de donde parten, vértice. Un ángulo se nombra con tres letras, colocadas una en el vértice y otra en cada lado; la del vértice se lee entre las otras dos. A veces se designa con una sola letra minúscula, o nombrando únicamente la letra del vértice.

Ejemplo: ángulo *BAC* o ángulo *A* (fig. 33).

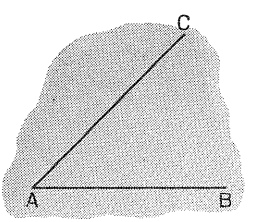


FIG. 33

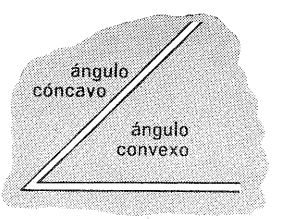


FIG. 34

129. Ángulo cóncavo y ángulo convexo. — En realidad, dos semirrectas que parten de un mismo punto determinan dos ángulos; de ellos, se denomina *convexo* al que no comprende la prolongación de los lados hecha por el vértice, y *cóncavo* al otro (fig. 34).

De no advertir lo contrario, al nombrar un ángulo nos referiremos siempre al convexo o saliente.

130. Igualdad de ángulos. Transportador de ángulos. — Recortemos en una cuartilla dos ángulos y llevemos uno sobre otro, de manera que coincidan el vértice y un lado de uno con el vértice y un lado del otro; si los otros dos lados también coinciden, diremos que los dos ángulos son iguales, y en caso contrario diremos que los ángulos son desiguales.

Dos ángulos son iguales si superpuestos coinciden.

Así, los ángulos *BAC* y *B'A'C'* de la figura 35 son iguales, mientras que los *BAC* y *B'A'C'* de la figura 36 son desiguales. De estos dos últimos decimos que el segundo es mayor que el primero o que el primero es menor que el segundo.

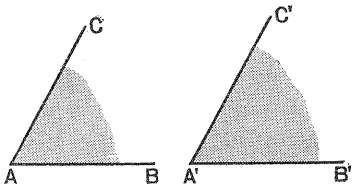


FIG. 35

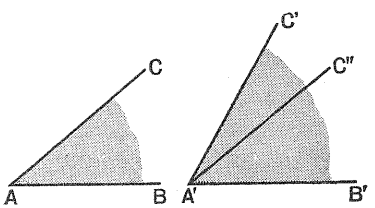
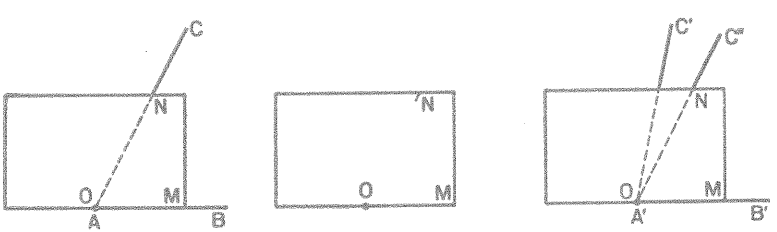


FIG. 36

Un medio muy sencillo de obtener un ángulo igual a otro es calcarlo en un papel transparente. De este modo resulta fácil la operación del transporte y comparación de ángulos.

Como transportador de ángulos se emplea el semicírculo graduado (figura 50). Podemos improvisar un transportador con una tarjeta u hoja de cartulina (fig. 37). Veamos su manejo.

Sea *BAC* el ángulo que queremos transportar sobre el *B'A'C'* para ver si coinciden. Sobre uno de los lados *AB* del ángulo *BAC* hacemos que



a) *b)* *c)*

FIG. 37

caiga un borde de la tarjeta y marcamos en él el punto O de coincidencia con el vértice A del ángulo. Al señalar luego el punto N en que el lado AC corta al contorno de la tarjeta, tendremos determinado el ángulo BAC, y la tarjeta quedará como se indica en *b*).

Bastará ahora llevarla sobre el ángulo $B'A'C'$, de modo que el punto O coincida con el vértice A' del ángulo, y el borde OM con el lado $A'B'$. En el caso de ser iguales los ángulos BAC y $B'A'C'$, el lado $A'C'$ pasaría por N.

Para obtener el ángulo $B'A'C''$ igual al BAC, marcaremos en el papel el punto coincidente con N y lo uniremos luego con A'.

El transporte de ángulos se basa en que *dos ángulos iguales a un tercero son iguales entre sí.*

131. Generación del ángulo. Ángulo llano y ángulo completo. — Un ángulo puede considerarse engendrado por una semirrecta que empieza por coincidir con otra y luego gira alrededor de su extremo (fig. 38).

En la primera posición, cuando OB coincide con OA, se dice que las semirrectas forman un ángulo *cero* o *nulo*. Cuando OB comienza a girar alrededor de O, aparece un ángulo saliente o *convexo*, y en el momento en que OB y OA forman una sola recta, se tiene un ángulo que recibe el nombre de ángulo *llano*.

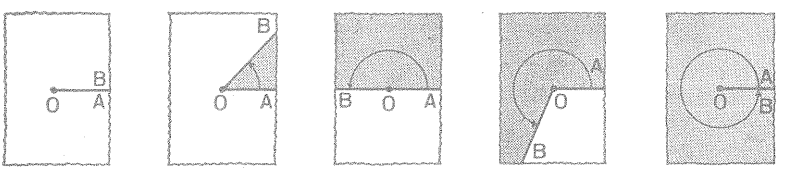


FIG. 38

Ya que siempre es posible hacer coincidir a dos ángulos llanos, diremos que *todos los ángulos llanos son iguales.*

Si OB continúa girando, aparecerá un ángulo entrante o *cóncavo*, el cual irá aumentando hasta llegar a valer dos llanos; en este caso se dice que es un ángulo *completo* o, mejor, *un giro.*

132. Bisectriz de un ángulo. — *Es la semirrecta que partiendo del vértice divide al ángulo en dos ángulos iguales.*

Si recortamos un ángulo AOB, dibujado en un papel, y le doblamos de

manera que el lado *OB* caiga sobre el *OA*, la semirrecta *OC* obtenida por el pliegue será la bisectriz (fig. 39).

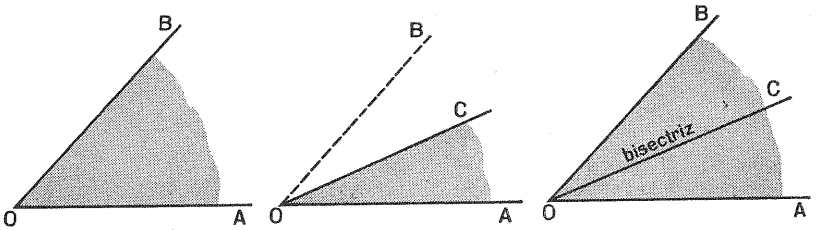


FIG. 39

133. Ángulo recto. Ángulos agudo y obtuso. — La figura 40 representa, en primer lugar, un ángulo llano *AOB*. Si lo doblamos de manera que *OB* caiga sobre *OA*, en el pliegue aparecerá la bisectriz *OC*, que forma con *OA* y *OB* los ángulos iguales *AOC* y *BOC*. De cada uno de estos ángulos decimos que es un ángulo *recto*.

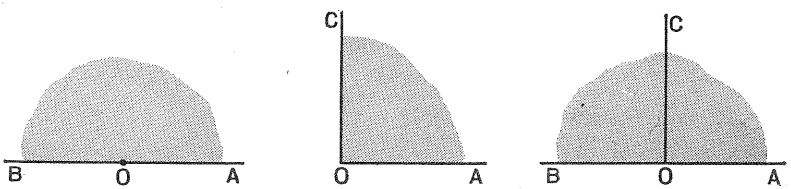


FIG. 40

Ángulo recto es la mitad de un llano (fig. 41).

Como todos los ángulos llanos son iguales, sus mitades, los ángulos rectos, también serán iguales.

Se llama *ángulo agudo* al que es menor que un recto (fig. 42).

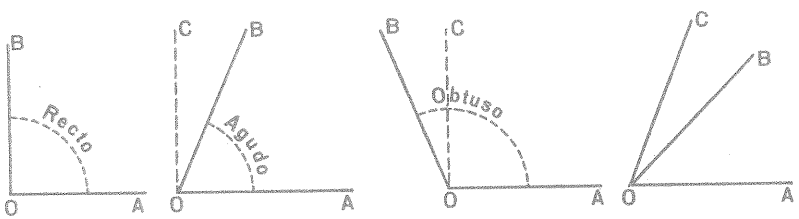


FIG. 41 FIG. 42 FIG. 43 FIG. 44

Se llama *ángulo obtuso* al que es mayor que un recto y menor que un llano (fig. 43).

134. Ángulos consecutivos. — *Ángulos consecutivos son dos ángulos que tienen el vértice y un lado común y los otros dos lados a una y otra parte del común.*

Ejemplo: los ángulos *AOB* y *BOC* (fig. 44).

135. Suma y diferencia de ángulos. — Para *sumar* dos ángulos *a* y *b* (fig. 45) se colocan consecutivos. El ángulo *MON* formado por el conjunto de puntos que pertenecen a *a* y a *b*, se llama suma de *a* y *b*:

$$MON = a + b$$

La operación de adición puede reiterarse, es decir, obtenida la suma de dos ángulos, se puede sumar a este resultado un tercer ángulo y continuar la operación con un cuarto, etc.

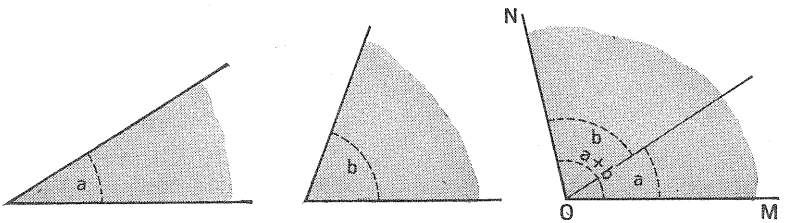


FIG. 45

Diferencia entre dos ángulos es el ángulo que sumado con el menor da el mayor. Para *restar* dos ángulos se colocan superpuestos; la diferencia será el ángulo formado por los lados que no coinciden.

En la figura 46 tenemos: $MON = a - b$.

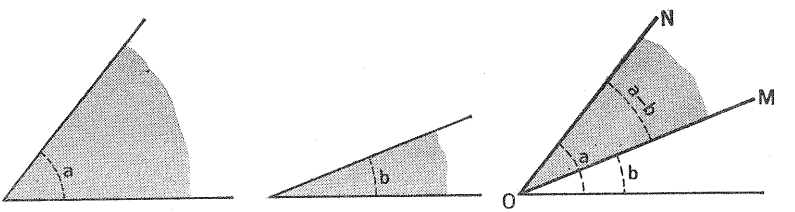


FIG. 46

136. Ángulos complementarios y suplementarios. — Dos ángulos son *complementarios* cuando su suma es igual a un recto. *Complemento* de un ángulo es lo que le falta para valer un recto.

Ejemplo: los ángulos *a* y *b* (fig. 47) son complementarios; el complemento de *a* es *b*, y viceversa, el complemento de *b* es *a*.

Dos ángulos son *suplementarios* cuando su suma es igual a dos rectos o un llano. *Suplemento* de un ángulo es lo que le falta para valer dos rectos.

Ejemplo: los ángulos *a* y *b* (fig. 48) son suplementarios; el suplemento de *a* es *b*, y viceversa, el suplemento de *b* es *a*.

Dos ángulos que tienen el mismo complemento o el mismo suplemento son iguales.

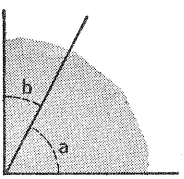


FIG. 47

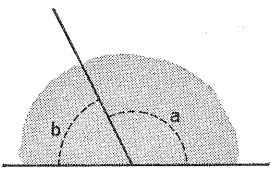


FIG. 48

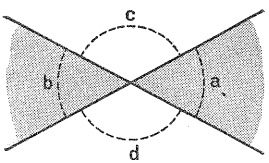


FIG. 49

137. Ángulos adyacentes. — *Ángulos adyacentes son dos ángulos consecutivos, cuyos lados no comunes están en línea recta.* Ejemplo, los ángulos *a* y *b* de la figura 48.

Dos ángulos adyacentes suman un llano; es decir, son suplementarios.

138. Ángulos opuestos por el vértice. — *Ángulos opuestos por el vértice son dos ángulos, cada uno de los cuales está formado por las prolongaciones de los lados del otro.* Ejemplo, los ángulos *a* y *b*; o, también, los *c* y *d* (fig. 49).

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales, ya que tienen el mismo suplemento.

EJERCICIOS

305. Dibujar dos ángulos convexos y dos ángulos cóncavos.

306. Dibujar dos ángulos agudos y comprobar con el transportador (una tarjeta) si son iguales o desiguales. Hacer lo mismo con dos ángulos obtusos.

307. ¿Son iguales todos los ángulos rectos? ¿Y los agudos? ¿Y los obtusos?

308. Si un ángulo es agudo, ¿como será: *a)* el complementario; *b)* el suplementario; *c)* el adyacente; *d)* el opuesto por el vértice?

309. ¿Qué clase de ángulo forman las agujas del reloj: *a)* a las 2 en punto; *b)* a las 3 en punto; *c)* a las 5 en punto; *d)* a las 6 en punto; *e)* a las 2 y cuarto?

310. En la figura 1, nombrar seis ángulos.

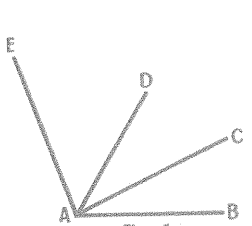


Fig. 1

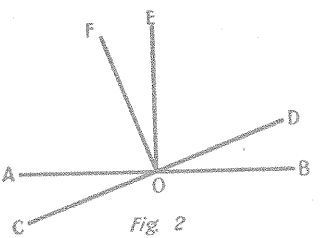


Fig. 2

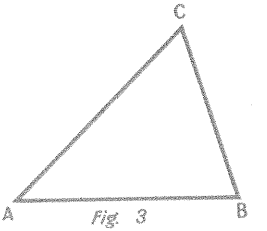


Fig. 3

311. En la figura 2, *OE* y *OF* son las bisectrices de los ángulos llanos *AOB* y *COD*, respectivamente. Esto supuesto, nombrar: *a)* 3 ángulos rectos; *b)* 3 agudos; *c)* 3 obtusos; *d)* 3 pares de complementarios; *e)* 3 pares de suplementarios; *f)* 2 pares de opuestos por el vértice.

312. Sumar los tres ángulos de la figura 3. ¿Qué clase de ángulo es el ángulo suma?

313. Dados tres ángulos: *a, b, m,* decir qué será *a* con respecto a *b*, si *a* es complemento de *m*, y *m* es complemento de *b*. Ayudarse del dibujo.

314. Dados tres ángulos: *a, b, m,* decir qué será *a* con respecto a *b*, si *a* es suplemento de *m*, y *m* es suplemento de *b*. Ayudarse del dibujo.

315. Dados tres ángulos: *a, b, m,* decir a qué es igual la diferencia $a - b$, si *a* es suplemento de *m* y *m* es complemento de *b*. Ayudarse del dibujo.

316. Dados tres ángulos: *a, b, m,* decir a qué es igual la diferencia $b - a$, si *a* es complemento de *m* y *m* es suplemento de *b*. Ayudarse del dibujo.

317. Transportar sobre un papel, ordenados de mayor a menor, los cinco ángulos de la figura 4.

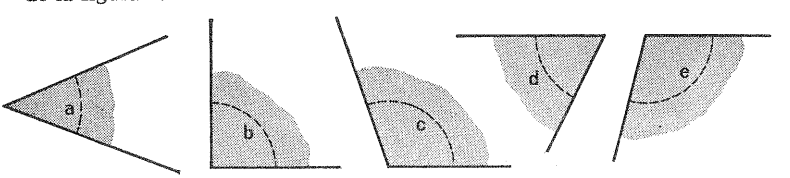


FIG. 4

318. Determinar gráficamente los ángulos: $a + d$; $c + d$; $c + e$; $a + b + d$.

319. Determinar gráficamente los ángulos: $e - d$; $c - b$; $b - a$; $e - a$.

320. Determinar gráficamente los ángulos: $3a$; $2a + d$; $3d - e$; $2c - b$.

20. Medida de los ángulos y del tiempo

139. Medida de un ángulo.— Medida de un ángulo es el número que indica las veces que contiene a otro ángulo elegido como unidad.

140. Unidades angulares. — La unidad que se toma para medir es el *ángulo recto,* pero como en la mayoría de los casos resulta demasiado grande, necesitaremos usar divisores o submúltiplos del ángulo recto, que son el grado, el minuto y el segundo.

Se emplean dos sistemas de unidades: el *sexagesimal* y el *centesimal.*

I. SISTEMA SEXAGESIMAL. — En este sistema, usado desde muy antiguo, se considera al ángulo recto dividido en 90 partes iguales, que se llaman *grados;* cada grado se divide en 60 partes iguales, denominadas *minutos,* y cada minuto en 60 partes iguales, que reciben el nombre de *segundos.*

Los grados, minutos y segundos sexagesimales se representan, respectivamente, por los signos °, ′ y ″, escritos en la parte superior derecha del número.

II. SISTEMA CENTESIMAL. — Modernamente se va generalizando bastante el sistema centesimal, en el que se considera al ángulo recto dividido en 100 partes iguales, llamadas *grados;* al grado en 100 partes iguales, denominadas *minutos,* y al minuto en 100 partes iguales, llamadas *segundos.*

Los grados, minutos y segundos centesimales se representan, respectivamente, por las letras ^{g}, ^{m} y ^{s}, escritas en la parte superior derecha del número, a modo de exponentes.

141. El transportador. — Para medir ángulos se emplea el aparato llamado *transportador* o *limbo graduado,* que consiste en un semicírculo de metal o de plástico, en cuyo contorno se hallan marcados los grados de 0 a 180 o de 0 a 200, según se trate de la división sexagesimal o de la centesimal.

Para usar el transportador, se coloca su centro en el vértice del ángulo que se quiere medir, se hace coincidir el diámetro del transportador con

un lado del ángulo y se lee el número de la graduación por el que pasa el otro lado. Así, la medida del ángulo *AOB* (fig. 50) es de 50°.

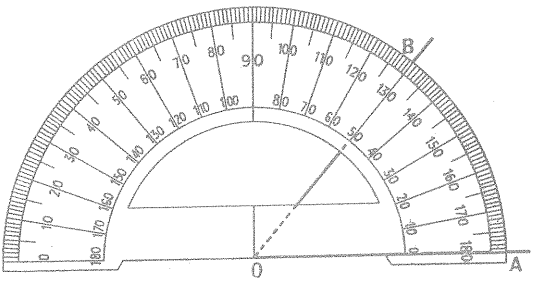


FIG. 50

Se emplea también el transportador para construir sobre una recta un ángulo de graduación conocida.

142. Unidades de tiempo o unidades cronométricas. — Para medir el tiempo se toman como fundamento los fenómenos astronómicos que se derivan del movimiento de la Tierra.

Día es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta sobre su eje, es decir, en su movimiento de rotación.

El día se divide en 24 *horas,* la hora en 60 *minutos* y el minuto en 60 *segundos.*

Como múltiplos del día, se consideran la *semana,* que consta de 7 días, la *decena* (10 días) y la *quincena* (15 días).

Año es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol, es decir, en su movimiento de traslación.

Un año solar tiene aproximadamente 365 días y $\frac{1}{4}$ de día. (1 año solar = 365'2425 días = 365 días + $\frac{1}{4}$ de día − 3/400 de día).

En la práctica se considera el *año civil,* de 365 días, y cada 4 años, de 366 *(año bisiesto)* (*).

(*) REGLA. *Son bisiestos los años expresados por números divisibles por* 4.

Pero si nos fijamos en la duración que hemos indicado para el año solar, vemos que al considerar el año civil de 366 días cada cuatro años, agregamos algo más de lo debido, a saber: $\frac{3}{400}$ de día por año; lo cual representa 3 días más al cabo de 400 años. Este aumento de 3 días cada 400 años se compensa no considerando bisiestos los años múltiplos de 100 (años seculares) cuyo número de centenas no sea múltiplo de 4.

El año se divide en 12 *meses*, todos son de 31 días, excepto abril, junio, septiembre y noviembre, que tienen 30, y febrero, que es de 28 días los años ordinarios y de 29 los bisiestos.

Asimismo, se acostumbra a dividir el año en 2 *semestres*, en 3 *cuatrimestres* y en 4 *trimestres*.

Como múltiplos del año, se consideran: el *bienio* (dos años), el *trienio* (tres años), el *cuatrienio* (cuatro años), el *quinquenio* o *lustro* (cinco años), el *decenio* o *década* (diez años), el *siglo* (cien años) y el *evo* o *milenio* (mil años).

143. Los relojes. — Son aparatos destinados a medir el tiempo. Se construyen de formas diversas, pero todos ellos llevan un mecanismo adecuado por el que se regula el movimiento de las manecillas de modo que la mayor *(minutero)* da una vuelta completa en una hora, mientras que la pequeña emplea 12 horas en efectuar el mismo recorrido.

La *esfera* del reloj está dividida en 12 partes iguales, que corresponden a las horas; cada uno de los espacios comprendidos entre hora y hora se halla, a su vez, dividido en 5 partes iguales, por lo que en total resultan 60 de estas divisiones, que son las correspondientes a los minutos que hay en una hora. La medida del tiempo queda reducida de este modo a la de los ángulos girados por las agujas.

EJERCICIOS

321. Decir, en cada caso, si los ángulos que resultan de dividir un ángulo recto en 100, 70 y 120 partes iguales, son mayores, iguales o menores: 1.º, que un grado sexagesimal; 2.º, que un grado centesimal.

322. Decir si es agudo, recto, obtuso o llano cada uno de los ángulos: $A = 45°$; $B = 120°$; $C = 96^g$; $D = 180°$; $E = 118^g$; $F = 29°$; $G = 66^g\ 11^m$; $H = 100°\ 58'\ 13''$; $I = 99^g\ 8^m\ 79^s$; $J = 178°\ 43'\ 19''$.

323. Con ayuda también de un transportador, construir los siguientes ángulos: $A = 35°$; $B = 63°$; $C = 147°$; $D = 101°$; $E = 170°$

324. Decir si serán bisiestos o no los años:
1963; 1970; 1972; 1986; 1996; 2000; 2100; 2400

325. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj cuando éste señala las 11 h. 30 min.?

21. Transformación de números concretos

144. Transformación de números que expresan unidades angulares centesimales. — Como la ley de variación en las unidades angulares centesimales es la misma que en las de superficie, podremos aplicar las reglas dadas para éstas (80) cuando se trate de problemas análogos con números que expresan unidades angulares centesimales.

EJEMPLOS:

1) *Paso de complejo a incomplejo:*

Un ángulo de $63^g\ 12^m\ 9^s$ equivale a 0'631209 rectos
Un ángulo de $95^g\ 78^s$ equivale a 0'950078 rectos

2) *Paso de incomplejo a complejo:*

Un ángulo de 0'489312 rectos equivale a $48^g\ 93^m\ 12^s$
Un ángulo de 0'734 rectos equivale a $73^g\ 40^m$

3) *Cambio de unidad:*

Un ángulo de 0'682 rectos equivale a 6.820^m
Un ángulo de 94.076^s equivale a $9'4076^g$

145. Transformación de números que representan medidas en unidades no decimales. — Las unidades cronométricas y las angulares dadas en la división sexagesimal, nos muestran la necesidad de conocer las reglas que nos permitan la transformación de números concretos expresados en un sistema *no decimal* de medida.

He aquí los casos que pueden presentarse:

1) *Cambio de unidad.*
2) *Reducción de un complejo a incomplejo.*
3) *Reducción de un incomplejo a complejo.*

146. Cambio de unidad. — Con frecuencia se da el caso de tener que expresar un número concreto en unidades de distinto orden a aquel en que va dado. Para deducir la regla general que se ha de seguir en tales casos, resolveremos algunos problemas.

PROBLEMA 1.º — Expresar en minutos el ángulo 53°.

Como en 1° hay 60′, el número de minutos que equivalen a 53°, será

$$53 \times 60' = 3.180'$$

PROBLEMA 2.º — ¿Cuántos días corresponden a 37 semanas?

Cada semana tiene 7 días; luego, en 37 semanas habrá

$$37 \times 7 \text{ días} = 259 \text{ días.}$$

La marcha seguida en ambos casos, nos permite enunciar la siguiente

REGLA. — *Para reducir un número incomplejo* A UN ORDEN INFERIOR, *se multiplica el número dado por las veces que su unidad contiene a la de orden inferior.*

Si el orden a que se reduce el número no es el inmediato inferior, la reducción puede hacerse pasando por los órdenes intermedios.

Sea, por ejemplo, reducir 8 días a minutos.

Convirtiendo los 8 días en horas, se obtiene:

$$24 \text{ horas} \times 8 = 192 \text{ horas;}$$

y expresando las 192 horas en minutos, resulta:

$$192 \times 60 \text{ minutos} = 11.520 \text{ minutos}$$

Hubiéramos obtenido el mismo resultado, hallando primero los minutos que tiene un día, es decir: $24 \times 60 = 1.440$, y multiplicando luego 1.440 por 8.

Veamos ahora el caso de reducir un número incomplejo a otro de orden superior:

PROBLEMA 3.º — Expresar en grados el ángulo 111.600″.

Como 3.600″ equivalen a 1°, en 111.600″ habrá tantos grados como veces esté contenido 3.600 en 111.600; es decir,

$$111.600 : 3.600 = 31$$

Si el cociente no fuera exacto, se aproximará por decimales.

REGLA. — *Para reducir un número incomplejo* A UN ORDEN SUPERIOR, *se divide el número dado por las veces que su unidad está contenida en la de orden superior.*

147. Reducción de un complejo a incomplejo. — PROBLEMA. *Expresar en segundos el ángulo* 127° 16′ 4″.

Tendremos que 127 equivalen a

$$127 \times 60 = 7.620'$$

Sumando estos 7.620′ con los 16 que había, serán

$$7.620' + 16' = 7.636'$$

Pero 7.636′ equivalen a

$$7.636 \times 60 = 458.160''$$

Luego, en 127° 16′ 4″ habrá

$$458.160 + 4 = 458.164''$$

127
× 60
7.620
+ 16
7.636
× 60
458.160
+ 4
458.164

Las operaciones se disponen tal como se indica a la derecha.

148. Reducción de un incomplejo a complejo. — PROBLEMA. — *Descomponer el incomplejo* 878.926 *minutos en sus diversas unidades.*

Las operaciones que es preciso practicar van suficientemente aclaradas a continuación:

878926 m.	60 (minutos que tiene 1 hora)		
278	14648 h.	24 (horas que tiene 1 día)	
389	024	610 d.	365 (días de 1 año)
292	Resto 08 h.	Resto 245 d.	1 año
526			
Resto 46 m.			

Luego, 878.926 m. = 1 año 245 días 8 horas 46 minutos

Veamos ahora dos casos particulares.

1. VALUAR UNA FRACCIÓN. — Cuando el incomplejo viene expresado por una fracción, la operación de hallar el complejo que le es equivalente, se denomina *valuar la fracción.*

PROBLEMA. — *Valuar la fracción* $\frac{29}{7}$ *de día.*

Tendremos:

$\frac{29}{7}$ de día = 4 días + $\frac{1}{7}$ de día.

$\frac{1}{7}$ de día = $\frac{1}{7} \times 24 = \frac{24}{7}$ = 3 h. + $\frac{3}{7}$ de hora.

$\frac{3}{7}$ de hora = $\frac{3}{7} \times 60 = \frac{180}{7}$ = 25 min. + $\frac{5}{7}$ de min.

$\frac{5}{7}$ de min. = $\frac{5}{7} \times 60 = \frac{300}{7}$ = 42 seg. + $\frac{6}{7}$ de seg.

Luego, $\frac{29}{7}$ de día = 4 d., 3 h., 25 min. y 42 $\frac{6}{7}$ de seg.

La operación se dispone como se indica al margen.

29 d. | 7	
1	4 d.
× 24	
24 h. | 7	
3	3 h.
× 60	
180 m. | 7	
40	25 m.
5	
× 60	
300 s. | 7	
20	42 s.
6	

II. VALUAR LA EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO CONCRETO. — Si el número incomplejo viene expresado por un decimal, la operación de hallar el complejo equivalente resulta más sencilla.

PROBLEMA. — *Expresar en grados, minutos y segundos sexagesimales el ángulo que mide* 0'7215 *rectos.*

Las operaciones que han de practicarse, quedan suficientemente aclaradas a continuación:

0'7215 × 90 = 64'935	64°
0'935 × 60 = 56'1	56′
0'1 × 60 = 6	6″

Es decir, que 0'7215 rectos = 64° 56′ 6″

EJERCICIOS

326. Expresar en rectos los siguientes ángulos:
$32^g\ 48^m\ 85^s$; $94^g\ 12^m\ 9^s$; $54^g\ 78^m$; $67^g\ 7^s$; $23^g\ 8^m\ 5^s$

327. Expresar en grados, minutos y segundos centesimales los siguientes ángulos:
0'292086 rectos; 0'380961 rectos; 0'928 rectos; 0'860019 rectos

328. Expresar, respectivamente, en minutos, grados, segundos y minutos, los resultados obtenidos en el ejercicio anterior.

329. Expresar: 19 semanas en días; 24 horas en minutos; 216 minutos en segundos; 3 días en minutos; 24 horas en segundos.

330. Expresar: 1 año en horas; 1 año en segundos; 5 siglos en lustros; 117 lustros en años; 1 lustro en horas.

331. Expresar: 4 rectos en grados sex.; 39° en minutos sex.; 26′ en segundos sexagesimales; 2 rectos en minutos sex.; 1 recto en segundos sex.

332. Expresar: 125 ptas. en reales; 78 duros en pesetas; 13 duros en reales; 12 duros en céntimos; 49 reales en céntimos.

333. Expresar: 126 horas en días; 96 días en semanas; 254 años en siglos; 87 años en lustros; 8.760 horas en días.

334. Expresar: 832 min. en horas; 12.340 seg. en minutos; 1.440 min. en horas; 4.320 min. en días; 604.800 seg. en días.

335. Expresar: 270° en rectos; 4.216′ en grados sex.; 2.804″ en minutos sex.; 70.200′ en rectos; 104.400″ en grados sex.; 972.000″ en rectos.

336. Reducir a segundos:

a) 4 h. 23 min. 12 seg.
b) 1 h. 58 min.
c) 9 h. 36 min. 20 seg.
d) 3 h. 19 seg.

337. Reducir a horas:

a) 2 sem. 5 días 7 h.
b) 4 sem. 21 h.
c) 5 sem. 1 día 18 h.
d) 1 año 5 sem. 3 días

338. Reducir a días (*):

a) 2 siglos 24 años 7 sem.
b) 3 años 28 días
c) 5 lustros 2 años 13 días
d) 8 lustros 4 años 5 sem.

339. Reducir a segundos sexagesimales:

13° 28′ 32″; 47° 54′; 63° 45″; 1 recto 60° 29″

340. Reducir a complejo de tiempo:

19.684 min.; 3.408 seg.; 1.072 h.; 9.527 días; 86.400 seg.

341. Reducir a grados, minutos y segundos sexagesimales:

6.243″; 19.584″; 37.109″; 41.000″; 90.909″

342 Valuar las siguientes expresiones:

a) $\frac{7}{9}$ de día
b) $\frac{5}{8}$ de recto (a órdenes sexag.)
c) 3'285 horas
d) $\frac{11}{19}$ de recto (a órd. sex.)
e) 17'2091 días
f) 0'8732 de recto (a órd. sex.)

(*) No se tengan en cuenta los años bisiestos.

22. Operaciones con números concretos

149. Adición. — Para sumar números concretos *incomplejos*, es preciso que sean homogéneos (de la misma especie) y que estén referidos a la misma unidad. Entonces, basta aplicar las reglas estudiadas para sumar números enteros y decimales.

Así, para sumar 9 m 41'6 dm y 634 cm tendremos que expresar los tres valores en la misma unidad, en metros por ejemplo, y sumar luego los números que resulten:

$$9 + 4'16 + 6'34 = 19'50$$

La suma pedida es igual a 19'50 metros.

Cuando los sumandos tienen forma de *complejos*, se les puede reducir a incomplejos del mismo orden de unidades, y luego efectuar la suma.

EJEMPLO. — *Sumar* 3 Tm 7 Kg 2 g + 36 Mg 9 Kg 2 Dg 8 dg + 20 Hg 6 g. *Dar el resultado en kilogramos.*

Tendremos:

3 Tm 7 Kg 2 g	=	3.007'002	Kg
36 Mg 9 Kg 2 Dg 8 dg	=	369'0208	Kg
20 Hg 6 g	=	2'006	Kg
Suma		3.378'0288	Kg

Pero si los números no pertenecen al sistema métrico, lo que generalmente se hace es sumar por separado los de cada orden de unidades, comenzando por el orden inferior. Las unidades del orden inmediato superior que resulten de cada suma parcial, se añaden a la columna siguiente.

EJEMPLO. — *Hallar la medida del ángulo suma de otros tres cuyos valores respectivos son* 45° 52′ 41″, 38° 29′ 35″ y 79° 50′ 16″.

Coloquemos en columna las distintas unidades y sumemos separadamente:

45°	52′	41″
38°	29′	35″
79°	50′	16″
162°	131′	92″
164°	**12′**	**32″**

Al sumar separadamente los grados, los minutos y los segundos, han resultado 162° 131′ y 92″. Pero, teniendo en cuenta que en 92″ hay 1′ y 32″, hemos añadido 1′ a los 131′ que había, obteniéndose 132′, que equivalen a 2° 12′; agregando estos 2° a los 162° que había, forman 164°. Resulta, por tanto, que la medida del ángulo suma es 164° 12′ 32″.

150. Sustracción. — Para restar números concretos *incomplejos*, es necesario que sean homogéneos y que vayan expresados en la misma unidad.

EJEMPLO. — *Calcular la diferencia que hay entre* 0'6 Ha *y* 3.720 m².

Como 0'6 Ha equivalen a 6.000 m², la diferencia pedida, expresada en metros cuadrados, será 6.000 − 3.720 = 2.280.

Si los números tienen forma de complejos, se les puede reducir a incomplejos, del mismo orden de unidades, y luego restarlos. Pero si no pertenecen al sistema métrico, es preferible restar separadamente los de cada orden de unidades, empezando por el orden inferior. Si algún minuendo parcial es menor que su correspondiente sustraendo, se añaden a aquél las unidades de su orden que estén contenidas en una del orden superior, cuidando luego de disminuir en una unidad al minuendo siguiente.

EJEMPLO 1.° — *De* 7 días 5 h. 34 min. *restar* 4 días 11 h. 19 min.

(6 d.)	(29 h.)	
7 d.	5 h.	34 min.
−4 d.	11 h.	19 min.
2 d.	**18 h.**	**15 min.**

Como de 5 horas no es posible restar 11 h., hemos añadido al minuendo 1 d. = 24 h., que con las 5 que había suman 29. Esas 24 horas, es decir 1 día, las hemos tomado del orden inmediato superior, por lo que en vez de 7 d. que teníamos, se han escrito 6.

EJEMPLO 2.º — *Calcular el ángulo complementario de otro que mide* 53° 41′ 18″.

El ángulo que se nos pide será la diferencia entre 90° y 53° 41′ 18″, pero como el minuendo no expresa minutos y segundos, no es posible restar directamente de ellos los 41′ 18″ que aparecen en el sustraendo. Ahora bien, como 90° = 89° 59′ 60″, procederemos así:

89°	59′	60″
−53°	41′	18″
36°	**18′**	**42″**

151. Multiplicación. — Tratemos de resolver los problemas siguientes:

PROBLEMA 1.º — *El vencedor de una carrera motorista, consistente en dar* 15 *vueltas a un circuito, empleó por término medio en cada vuelta* 6 *minutos* 47 *segundos. ¿Cuánto tiempo invirtió en total?*

Encontraremos la solución del problema multiplicando por 15 al complejo 6 minutos 47 seg., lo que equivale a hallar el valor de una suma de 15 sumandos iguales a ese número. Para efectuar dicha suma, empezaremos por sumar la columna de segundos y llevaríamos los minutos contenidos en el resultado a la columna de los minutos, operación equivalente a esta otra:

$$47 \times 15 = 705 \text{ s.} = 11 \text{ min. } 45 \text{ seg.}$$

La suma de la columna de minutos daría

$$6 \times 15 + 11 = 90 + 11 = 101 \text{ min.} = 1 \text{ h. } 41 \text{ min.}$$

Luego, el tiempo invertido fue de 1 hora 41 minutos 45 segundos.

En la práctica se dispone la operación del modo siguiente:

	6 min.	47 seg.
		× 15
	90 min.	705 seg.
1 h.	**41 min.**	**45 seg.**

PROBLEMA 2.° — *Hallar la medida de un ángulo que sea el triplo de otro cuyo valor es* 27° 54′ 33″.

Obtendremos la solución, multiplicando por 3, separadamente, los números que expresan grados, minutos y segundos en el multiplicando, y separando luego de cada producto parcial las unidades de orden superior que contenga, para añadirlas al siguiente. He aquí cómo se dispone la operación:

27°	54′	33″
		× 3
81°	162′	99″
83°	43′	39″

PROBLEMA 3.° — *Para llenar un depósito de un metro cúbico, un grifo emplea* 2 *horas* 35 *minutos. ¿Cuánto tiempo necesitaría para llenar un depósito de* 7'2 *metros cúbicos?*

El problema se resuelve multiplicando el complejo 2 h. 35 min. por 7'2. Pero, no siendo número natural el multiplicador 7'2, resultaría engorroso multiplicar separadamente, como se hizo en los problemas anteriores. Es preferible operar del siguiente modo:

Las 2 h. 35 min. equivalen a 155 minutos, tiempo que tarda el grifo en arrojar un metro cúbico de agua. Por consiguiente, para que arroje 7'2 m^3 necesitará

$$155 \times 7'2 = 1.116 \text{ minutos} = \mathbf{18\ h.\ 36\ min.}$$

De la consideración de los problemas anteriores se deduce que el resultado de la multiplicación de un número concreto por otro número, es de igual naturaleza que el multiplicando, en tanto que el multiplicador, propiamente considerado, es un número abstracto.

152. División. — Pueden presentarse dos casos. I. DIVISIÓN DE UN NÚMERO CONCRETO POR UN NÚMERO ABSTRACTO.

PROBLEMA 1.° — *Un ciclista empleó* 1 *hora* 58 *minutos y* 36 *segundos en dar* 12 *vueltas a una pista. Se desea saber el tiempo que empleó por término medio en dar una vuelta.*

El problema se resuelve dividiendo por 12 al complejo 1 h. 58 min. 36 seg. Una hora no puede dividirse por 12, pero convertida en minutos da 60, los cuales, unidos a los 58 que aparecen en el dividendo, componen 118. Divididos éstos por 12, resultan *9 minutos* y sobran 10. Convirtiendo estos 10 minutos en segundos y agre-

gando los 36 del dividendo, se obtienen 636 segundos. Al dividir ahora 636 por 12, hallamos por cociente exacto *53 segundos.*

El resultado final es, por tanto, 9 minutos y 53 segundos.

En la práctica, la operación se dispone del modo siguiente:

1 h.	58 min.	36 seg.	12
1 h. =	60 min.		**9 min. 53 seg.**
	118 min.		
	10 min. =	600 seg.	
		636 seg.	
		0	

PROBLEMA 2.° — *Hallar la séptima parte del ángulo cuya medida es* 80° 13′ 54″.

Razonando de forma análoga a como se ha hecho en el problema anterior, y disponiendo la operación como en él se ha indicado, tendremos:

80°	13′	54″	7
3° =	180′		**11° 27′ 42″**
	193′		
	4′ =	240″	
		294″	
		0	

II. DIVISIÓN DE UN NÚMERO CONCRETO POR OTRO DE IGUAL NATURALEZA.

PROBLEMA. — *Determinar cuántas veces mayor es el ángulo que mide* 113° 37′ 21″ *respecto del que tiene por valor* 12° 37′ 29″.

La solución será el cociente de dividir 113° 37′ 21″ por 12° 37′ 29″. Para hallar dicho cociente, reduciremos los dos ángulos a segundos y luego efectuaremos la división. Tenemos:

113° 37′ 21″ = 409.041″; 12° 37′ 29″ = 45.449″; 409.041 : 45.449 = **9.**

Luego, el primer ángulo es 9 veces mayor que el segundo.

EJERCICIOS

343. Efectuar las siguientes sumas:

264 m + 16 Hm + 24 Dm + 87 dm + 2.340 m + 102 mm
30'49 m^2 + 543'81 dm^2 + 19'2061 Hm^2 + 215'29 áreas
467'3 cm^3 + 2.648 mm^3 + 5'260314 dm^3 + 0'1 m^3

344. Sumar los siguientes números, tomando el m por unidad:

8 Km 3 Dm 5 m 3 cm; 56 Hm 7 Dm 40 dm

345. Sumar los siguientes números, tomando como unidad el m^2 y el área:

12 Km^2 36 Dm^2; 4 Hm^2 22 m^2; 5 Km^2 7 m^2; 91 Dm^2 8 m^2

346. Sumar los siguientes números, expresando el resultado en m^3:

136 m^3 94 dm^3; 804 dm^3 3 cm^3; 5 m^3 5 dm^3 5 cm^3

347. Sumar los siguientes números:

6 Hl 3 Dl 4 l; 7 Dl 5 dl 2 cl; 9 Hl 1 l

348. Sumar los siguientes números, expresando el resultado en Kg:

3 Tm 7 Kg 2 g; 9 Qm 2 Mg 5 Dg 8 dg; 20 Hg 6 g

349. Efectuar las siguientes diferencias:

803'39 Kg − 7.265'24 g
7 Km 3 Hm − 5 Km 8 Hm
161 m^3 289 dm^3 − 87 m^3 566 dm^3
48.329'7569 Dm^2 − 1.861'3002 m^2
26 Km^2 9 Hm^2 − 12 Km^2 62 Hm^2 3 Dm^2
11 Hl 5 l − 7 Hl 2 Dl 3 dl

350. La semisuma de dos segmentos rectilíneos es 709 cm. Si uno de ellos es 92'3 dm, ¿cuántos metros mide el otro?

351. La semidiferencia de dos segmentos rectilíneos es 19'7 dm. Si el mayor de ellos es 6'18 m, ¿cuántos decímetros mide el otro?

352. La suma de dos segmentos rectilíneos es 10'15 dm. Averiguar la medida de esos segmentos, sabiendo que uno es igual a 4 veces el otro.

353. Una pista mide 4 Km 7 Hm 2 Dm 8 m. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido un ciclista que ha dado 12 vueltas a esa pista?

354. Un terreno de 9 Ha 24 ca que se había comprado a razón de 7'50 ptas. el metro cuadrado, se ha vendido a 820 ptas. el área. ¿Qué beneficio se ha obtenido?

355. Un terreno de 3 Ha 19 a 5 ca se ha adquirido por 236.097 ptas. ¿A cómo resultó el metro cuadrado?

356. Un terreno de 0'8 Ha está dividido en dos partes, de las cuales una tiene 2.110 m^2 más que la otra. Ambas se han vendido al mismo precio el m^2. Si por la menor se recibieron 20.026 ptas., ¿cuánto se cobrará por la mayor?

Efectuar las siguientes sumas:

357. 8 h. 15 min. 9 seg. + 13 h. 56 min. 33 seg.
22 h. 50 min. + 11 h. 39 min. 42 seg. + 7 h. 12 min. 18 seg.
14 días 19 h. 22 seg. + 3 días 51 min. 8 seg. + 8 días 21 h. 9 min. 54 seg.

358. $9° 23' 18'' + 15° 42' 39'' + 87° 3' 56''$
$16° 18'' + 41° 22' + 63° 24' 38'' + 57' 19'' + 2° 13'$
$43^g 12^m 50^s + 11^g 28^s + 76^g 49^m + 21^g 18^m 58^s$

Efectuar las siguientes sustracciones:

359. 6 días 15 h. 27 min. − 4 días 9 h. 13 min.
3 días 8 h. 36 min. − 2 días 17 h. 25 min.
11 días 5 h. 19 min. − 9 días 11 h. 26 min.

360. $19° 31' 49'' - 5° 26' 52''$; $22° 35'' - 10° 16' 48''$
$88^g 33^m 40^s - 63^g 77^m 92^s$; $90° - 26° 18' 23''$

Efectuar los productos siguientes:

361. 4 días 6 h. 15 min. × 5; 2 días 11 h. 23 min. × 8
19 h. 31 min. 9 seg. × 14; 7 h. 56 min. 29 seg. × 20

362. $38° 21' 19'' \times 4$; $17° 12' 9'' \times 5$; $56^g 49^m 3^s \times 11$
$47° 2' 13'' \times 7$; $74^g 31^m 17^s \times 8$; $1° 58' 2'' \times 19$

Efectuar las divisiones siguientes:

363 13 días 9 h. 32 min. : 8; 19 días 6 h. 12 min. : 3
21 h. 19 min. 8 seg. : 7; 14 h. 29 min. 51 seg. : 6

364. $73° 32' 28'' : 4$; $105° 34' 32'' : 7$; $72^g 59^m 16^s : 6$
$85° 24' 9'' : 9$; $73° 41' 12'' : 8$; $277° 47' 48'' : 12$

365. Un ciclista ha invertido 7 horas 23 minutos 8 segundos en una carrera. ¿A qué hora llegó a la meta, si efectuó la salida a las 11 horas 12 minutos 48 segundos?

366. Una persona, que hace un viaje en ferrocarril, sale a las 11 horas 18 minutos de la noche y llega a su destino a las 8 horas 45 minutos de la mañana. ¿Cuánto tiempo invirtió en el viaje?

367. Una carrera, comenzada a las 8 h. 15 min. 19 seg. termina a las 10 h. 9 min. 10 seg. ¿Cuánto ha durado?

368. Un reloj, puesto en hora en este momento, se retrasa 2 min. 13 seg. cada día. ¿Cuál será la hora verdadera, cuando dentro de una semana señale dicho reloj las 10 h. 28 min. 39 seg.?

369. Un automóvil ha empleado 3 horas 34 minutos 48 segundos en dar 20 vueltas a un circuito. ¿Qué tiempo empleó por término medio en cada vuelta?

370. En una clase que dura una hora y cuarto, se dedica $\frac{1}{6}$ del tiempo a repasar la lección, los $\frac{3}{7}$ en preguntarla, y el resto en explicar la lección del día siguiente. Calcular la duración de cada una de las tres partes, aproximando hasta los segundos.

371. Hallar la suma de tres ángulos, sabiendo que el menor de ellos vale 19° 32′ 21″ y cada uno de los otros dos mide 5° 48′ 13″ más que el que le precede.

372. Calcular la suma de cuatro ángulos, sabiendo que el mayor de ellos vale 135° 16′ 8″ y cada uno de los otros tres mide 12° 3′ 45″ menos que el precedente.

373. Calcular el ángulo que es las 4 séptimas partes del que mide 38° 14′.

374. La suma de cuatro ángulos, A, B, C y D, es igual a 4 rectos. ¿Cuánto valdrá D, si $A = 38° 16' 30''$; $B = 4A$ y $C = (A+B) : 2$?

375. Hallar el complemento de los siguientes ángulos:

36°;	45°;	29° 40′;	83° 9′;	67° 19′ 25″;	90°
63^g;	51^g;	$35^g\ 26^m$;	$91^g\ 12^m$;	$72^g\ 33^m\ 9^s$;	100^g

376. Hallar el suplemento de los siguientes ángulos:

101°;	90°;	87° 34′;	127° 4′;	163° 15′ 12″;	180°
110^g;	100^g;	$146^g\ 72^m$;	$160^g\ 9^m$;	$88^g\ 26^m\ 2^s$;	200^g

377 Hallar el complemento y el suplemento de los siguientes ángulos, expresados en rectos: 0'8; 0'45; 0'7294; 0'61023; 0'005709.

378. Suponiendo que la Tierra es perfectamente esférica y que el metro es la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre, ¿cuál será la longitud de un arco de meridiano de 1°? ¿Cuál la de 1′? ¿Y cuál la de 1″?

23. La circunferencia y el círculo

153. Circunferencia. — Consideremos un segmento OA (fig. 51) y fijemos uno de sus extremos, O. Si, permaneciendo siempre en el plano del papel en que está dibujado, hacemos girar a ese segmento alrededor del punto O, el otro extremo A describirá una línea llamada *circunferencia.*

Dicha línea está contenida en un plano, por lo cual se dice que es *plana;* es *cerrada,* ya que acaba de formarse cuando el punto que la origina llega a la posición de partida; es además *curva,* y todos sus puntos se encuentran a *igual distancia* del punto fijo. Según esto, podemos dar la siguiente definición:

> **Circunferencia es una curva cerrada y plana, cuyos puntos equidistan de uno fijo llamado centro.**

En la práctica, para trazar circunferencias, el segmento es un hilo tirante del que se fija un extremo, y llevando sujeto en el otro la punta del lápiz o tiza con que se desea marcar la curva (fig. 52). Un compás que permanezca con abertura constante hará también las veces del segmento (fig. 53).

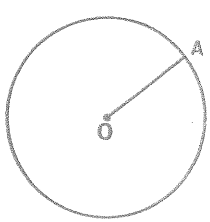


FIG. 51

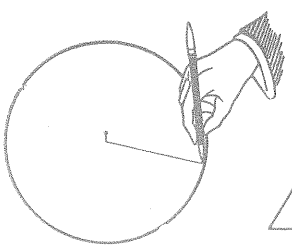


FIG. 52

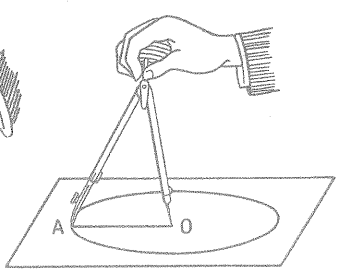


FIG. 53

154. Círculo — *Círculo es la porción de plano limitada por la circunferencia.*

Si recortamos un papel dirigiendo la tijera a lo largo de una circunferencia, separaremos el círculo del resto del plano.

Una circunferencia, o un círculo, se nombran por la letra de su centro. Así, diremos la circunferencia O, o el círculo O (fig. 54).

155. Radio y diámetro. — *Radio es el segmento rectilíneo que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.* El OR, por ejemplo (figura 55).

Según la definición de circunferencia, todos los radios son iguales.

Dos radios que sean prolongación uno de otro forman un diámetro, es decir, que *diámetro es un segmento rectilíneo que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro.* Por ejemplo, el AB (fig. 55).

Todos los diámetros de una circunferencia son iguales.

Un diámetro divide a la circunferencia y al círculo en dos partes iguales, llamadas *semicircunferencias* y *semicírculos,* respectivamente.

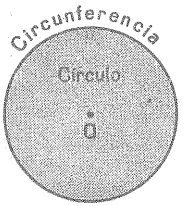


FIG. 54

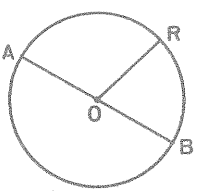


FIG. 55

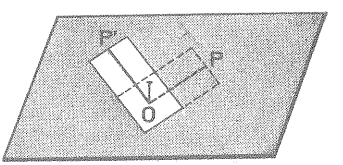


FIG. 56

156. Movimiento de rotación o giro. — Coloquemos una cartulina sobre el tablero de dibujo, clavemos luego un alfiler en un punto O de la cartulina y hagamos girar a ésta deslizándola sobre el tablero (fig. 56). Al efectuar este movimiento, decimos que hemos practicado una *rotación* o *giro* de la cartulina, tomando como centro el punto O, y llamamos *ángulo de giro* al ángulo POP' formado por la posición inicial y final de una cualquiera de las semirrectas que parten de O.

Si dibujamos en la cartulina una figura, un triángulo por ejemplo, y marcamos en el tablero la posición que tiene antes y después del giro, diremos que dicha figura ha sido transportada según una rotación (fig. 57).

En la rotación, todas las semirrectas (OA, OB, OC, ...) que parten del centro describen ángulos iguales ($AOA' = BOB' = COC' = ...$). Por eso decimos que

> **Una rotación queda determinada cuando se conoce el sentido en que se realizó y el ángulo de giro.**

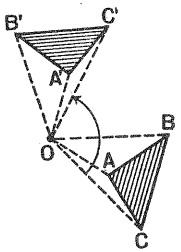


FIG. 57

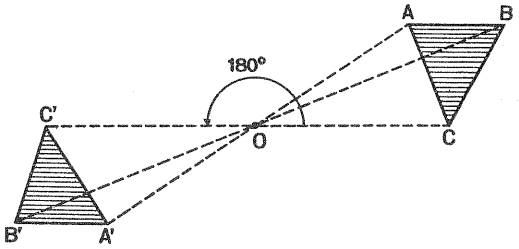


FIG. 58

157. Simetría respecto de un punto o simetría central. — Cuando en una rotación el ángulo de giro vale 180° o un llano, ocurre lo siguiente (figura 58):

> **1) Toda semirrecta que parte del centro de rotación se convierte en su opuesta.**
> **2) Cualquier ángulo que tenga su vértice en el centro de rotación se transforma en su opuesto por el vértice.**
> **3) Cualquier punto de la figura se convierte en otro situado a igual distancia del centro y en la semirrecta opuesta.**

En tales casos se dice de las dos figuras que son *simétricas* respecto del punto *O*, llamado *centro de simetría.*

Teniendo en cuenta que cada dos puntos simétricos son los extremos de un segmento cuyo punto medio es el centro de simetría, es fácil dibujar la simétrica de una figura con respecto a un punto como centro.

158. Figuras con centro de simetría.

> **Una figura es simétrica respecto a un centro, o tiene centro de simetría, si efectuando en ella una rotación de 180°, alrededor del centro, coincide consigo misma.**

Un segmento es simétrico respecto de su punto medio; una recta lo es respecto de cualquiera de sus puntos. La circunferencia y el círculo tienen centro de simetría, que es su propio centro. Igualmente tienen centro de simetría las letras *N* y *Z* y el hexágono dibujados en la figura 59. Para comprobarlo, bastará que hagamos girar a dichas figuras un ángulo de 180° alrededor de los puntos *O*, y veremos que coinciden consigo mismas.

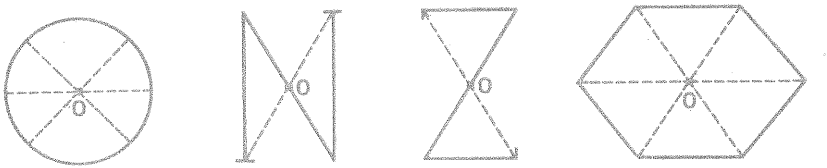


FIG. 59

Los segmentos rectilíneos que pasan por el centro de simetría y están limitados por dos puntos del contorno de la figura, quedan divididos por dicho centro en dos partes iguales.

159. Giro de una circunferencia. — De la definición de circunferencia y de lo dicho anteriormente, resulta que todo punto de la circunferencia se transforma, al girar ésta alrededor del centro, en otro punto de la misma circunferencia.

O, más brevemente: *La circunferencia es una línea que se desliza sobre sí misma al imprimirle un movimiento de rotación alrededor de su centro.*

160. Posiciones de un punto respecto de una circunferencia. — Los puntos del círculo que no pertenecen a la circunferencia que le sirve de límite, se dice que son *interiores* a la circunferencia; los restantes del plano son *exteriores*.

Como todo punto *A* interior está situado en un cierto radio, resulta que su distancia al centro es menor que el radio. Por el contrario, la distancia al centro de un punto *B* exterior es mayor que el radio (fig. 60).

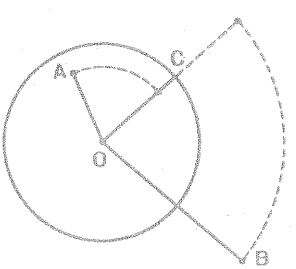


FIG 60

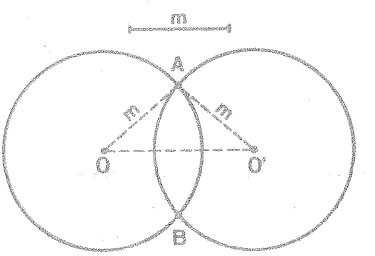


FIG 61

Recíprocamente: Si un punto dista del centro de una circunferencia una longitud menor, mayor o igual al radio, dicho punto será, respectivamente, interior, exterior a la circunferencia o estará situado en ella.

APLICACIÓN. — Como aplicación de lo anterior, para hallar todos los puntos que se encuentran a una distancia dada de un punto fijo, bastará trazar una circunferencia que tenga por centro el punto fijo y por radio la distancia dada.

Asimismo, podremos resolver problemas como el siguiente:

Hallar un punto cuyas distancias a otros dos O *y* O', *dados, sean iguales a un segmento conocido* m.

El punto pedido pertenecerá a las dos circunferencias cuyos centros son *O* y *O'* y los radios ambos iguales al segmento *m*. Por consiguiente, trazaremos dichas circunferencias, y el punto o puntos comunes *A* y *B*, si los tienen, serán las soluciones del problema (fig. 61).

161. Arco y cuerda.— *Arco* es una parte cualquiera *ACB* de la circunferencia (fig. 62). Los puntos *A* y *B* que limitan el arco se llaman *extremos*.

Para designar un arco se nombran los dos extremos. Pero a veces no bastan dos letras para nombrar un arco, pues si decimos el arco *AB*, lo mismo podemos entender el *ACB* que el *ADB*. Por eso, cuando puede haber confusión se necesitan tres letras para designar un arco.

Cuerda es el segmento rectilíneo que une los extremos de un arco. Por ejemplo, la *AB* (fig. 63).

A cada arco corresponde una cuerda, y cada cuerda subtiende dos arcos; pero si no se advierte lo contrario, por arco correspondiente a una cuerda entendemos el menor de los dos.

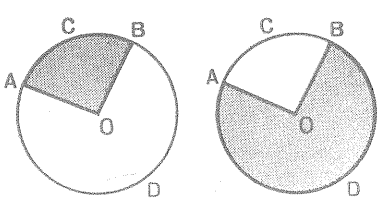


FIG. 62. — Sector circular.

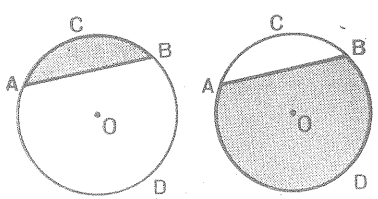


FIG. 63. — Segmento circular.

162. Sector y segmento circulares.— *Sector circular* es la parte de círculo comprendida entre un arco y los radios que pasan por los extremos de dicho arco. Ejemplo, el *ACBO* y el *ADBO* de la figura 62.

Segmento circular es la parte de círculo comprendida entre un arco y la cuerda correspondiente. Ejemplo, el *ACB* y el *ADB* (fig. 63).

163. Igualdad y desigualdad de arcos. — *Dos arcos son iguales cuando se les puede hacer coincidir por superposición.*

Evidentemente, los arcos que se comparan deberán pertenecer a la misma circunferencia o a circunferencias iguales.

Ejemplo: Los arcos AB y $A'B'$ (fig. 64) son iguales, como lo podemos comprobar calcando uno de ellos sobre papel transparente y efectuando luego un giro o rotación alrededor del centro O, hasta lograr la total superposición.

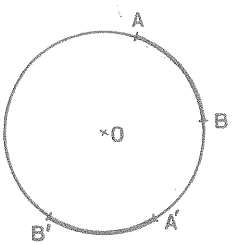


FIG. 64

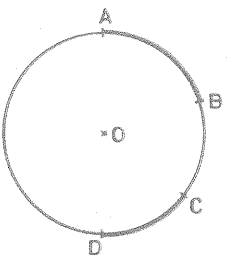


FIG. 65

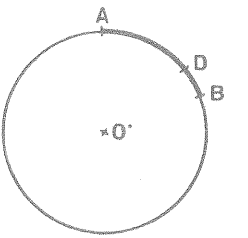


FIG. 66

Dos arcos, pertenecientes a la misma circunferencia o a circunferencias iguales, son desiguales cuando no se les puede hacer coincidir por superposición.

Ejemplo: Son desiguales los arcos AB y CD de la figura 65.

Si dos arcos AB y CD son desiguales (fig. 65), al llevar uno sobre otro de manera que coincidan los extremos A y C y los otros dos B y D queden a un mismo lado, puede ocurrir (fig. 66) que D caiga entre A y B, y entonces diremos que

$$\text{arco } CD < \text{arco } AB$$

Si D cayera después de B, diríamos que

$$\text{arco } CD > \text{arco } AB$$

164. Relación entre los arcos y sus cuerdas correspondientes. — En una circunferencia o en circunferencias iguales:

A arcos iguales corresponden cuerdas iguales.

En efecto: al ser iguales los arcos, se les puede hacer coincidir, por lo que sus cuerdas respectivas coincidirán también, ya que tienen los mismos extremos.

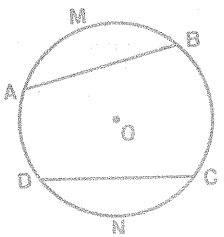


FIG. 67

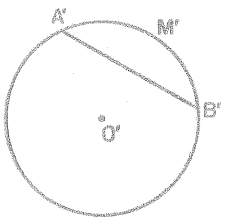


FIG. 68

Ejemplo: En las figuras 67 y 68 tenemos que,

si arco AMB = arco CND, será también cuerda AB = cuerda CD,
y si arco AMB = arco $A'M'B'$, será también cuerda AB = cuerda $A'B'$.

Recíprocamente: En una circunferencia o en circunferencias iguales:

Si dos cuerdas son iguales, los arcos correspondientes son también iguales.

165. APLICACIONES. — Como aplicación de la propiedad que acabamos de enunciar, resolveremos los problemas siguientes:

1) *Trazar un arco igual a otro dado.*

Se describe un arco con un radio igual al del arco dado y con el compás se lleva sobre él la cuerda de éste.

2) *Sumar arcos del mismo radio.*

Con un radio igual al de dichos arcos se traza un arco y se llevan sobre él, con el compás, las cuerdas de aquéllos, unas a continuación de otras; el arco suma será el que tenga por extremos el origen del primer arco y el final del último.

3) *Restar arcos de igual radio.*

Se traza un arco igual al minuendo y, a partir de uno de sus extremos, se lleva sobre él la cuerda del sustraendo; el arco que tenga por extremos los no comunes de dichos arcos será la diferencia pedida.

EJERCICIOS

379. ¿Es lo mismo circunferencia que círculo? Explicar la respuesta.

380. Ejercitarse en trazar a pulso muchas circunferencias y comprobarlas corrigiendo el movimiento de la mano.

381. Con el compás, trazar una circunferencia que tenga: 1.º, 21 mm de radio; 2.º, 54 mm de diámetro; 3.º, 2'3 cm de radio.

382. Dibujar un segmento rectilíneo, un ángulo, un triángulo y un cuadrilátero; hallar luego las correspondientes figuras simétricas, eligiendo en cada caso un punto que haga de centro de simetría.

383. ¿Cómo podría hallarse indirectamente, basándose en la simetría central, la distancia entre dos puntos *A* y *B*, entre los cuales hay un obstáculo? Proponer un ejemplo y construir la figura.

384. Dibujar tres figuras con centro de simetría, distintas de las que aparecen en el libro.

385. Dibujar un círculo y recortarlo. ¿Cómo podríamos hallar su centro, si antes no lo hubiéramos marcado? ¿En qué se funda la operación que hemos de hacer?

386. Hemos trazado una circunferencia con el compás y no hemos marcado el centro; pero conservamos la abertura del compás. ¿Cómo podremos hallar fácilmente dicho centro?

387. Tenemos dos puntos *A* y *B*, distantes entre sí 2 cm. ¿Cuál será la posición del punto *A* respecto de una circunferencia con centro en *B*, según que el radio de la misma sea 16 mm, 20 mm o 3 cm?

388. Dados dos puntos *A* y *B*, distantes 34 mm, ¿cómo haremos para trazar una circunferencia de 23 mm de radio que pase por ellos?

389. Hallar un punto cuyas distancias a otros dos *A* y *B*, distantes entre sí 27 mm, sean iguales a 19 mm.

390. Dados dos puntos *A* y *B* que distan 32 mm, hallar otro punto que diste 26 mm de *A* y 16 mm de *B*.

391. Marcar dos arcos en una circunferencia y, con el compás o con papel de calco, transportarlos, sumarlos y restarlos.

392. Dibujar varias circunferencias y trazar cuerdas en ellas. Medir esas cuerdas.

393. Dibujar sectores y segmentos circulares. Recortarlos luego.

394. Dibujar dos arcos desiguales. Sumarlos y restarlos.

395 Dibujar un arco y hallar luego otro que sea 3 veces el primero.

24. Rectas perpendiculares

166. Rectas perpendiculares y rectas oblicuas. — Dos rectas al cortarse forman cuatro ángulos; si uno de ellos es recto, también lo serán los otros tres, y entonces decimos que las rectas son *perpendiculares* entre sí (figura 69). En el caso de que las rectas, al cortarse, formen dos ángulos agudos y dos obtusos, se dice que son *oblicuas*, o que una es oblicua a la otra (fig. 70). O sea, que:

> **Rectas perpendiculares son aquellas que se cortan formando cuatro ángulos rectos.**
>
> **Rectas oblicuas son aquellas que se cortan formando dos ángulos agudos y dos obtusos.**

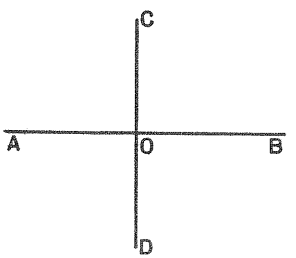


FIG. 69. — Perpendiculares

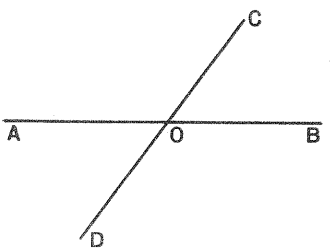


FIG. 70 — Oblicuas

167. Perpendicular a una recta por un punto. — *Por un punto de una recta se puede trazar a ésta una perpendicular, y solamente una.*

Así, por el punto *P* (fig. 71) sólo se puede trazar a *AB* la perpendicular *MP*. Pero por ese mismo punto se pueden trazar a *AB* un número indefinido de oblicuas.

Por un punto fuera de una recta se puede trazar a ésta una perpendicular, y solamente una.

Por el punto *P* (fig. 72) sólo se puede trazar a *AB* la perpendicular *PM*. Pero por ese mismo punto se pueden trazar a *AB* un número indefinido de oblicuas.

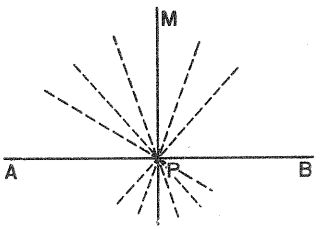


FIG. 71

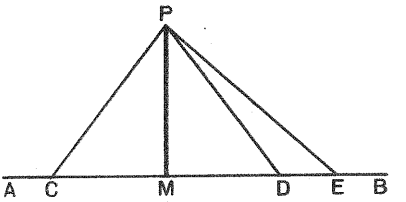


FIG. 72

168. Relación entre la perpendicular y las oblicuas y de las oblicuas entre sí. — Si desde un punto P (fig. 72) trazamos la perpendicular PM y varias oblicuas PC, PD y PE a la recta AB, y consideramos sólo los segmentos comprendidos entre P y las respectivas intersecciones (pies) con AB, podremos comprobar las siguientes propiedades:

1) **La perpendicular es menor que cualquier oblicua:** $PM < PC$.
2) **Dos oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son iguales:** $PC = PD$.
3) **De dos oblicuas cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquella cuyo pie esté más alejado:** $PE > PD$.

169. Distancia de un punto a una recta. — Como consecuencia de la propiedad 1), enunciada en el párrafo anterior, diremos:

Distancia de un punto a una recta es el segmento de perpendicular comprendido entre dicho punto y la recta.

170. Mediatriz de un segmento. — *Mediatriz de un segmento es la perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio.*

PROPIEDAD. — **Todo punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento.**

Sea el segmento *AB* (fig. 73) y *MN* su mediatriz. Las distancias de un punto cualquiera *M* de la mediatriz a los extremos del segmento son iguales por ser oblicuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular, ya que *P* es el punto medio de *AB*.

Recíprocamente: *Si un punto equidista de los extremos de un segmento, pertenece a la mediatriz.*

O, de otro modo: *la mediatriz contiene a todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.*

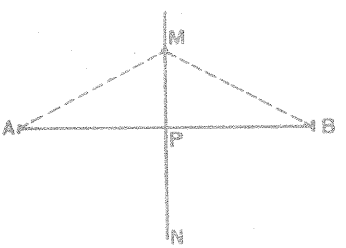


FIG. 73

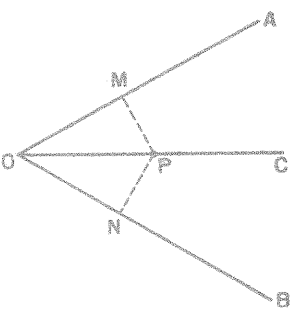


FIG. 74

171. Propiedad de la bisectriz de un ángulo.

Todo punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo.

Sea el ángulo *AOB* (fig. 74) y *OC* su bisectriz. Las distancias de un punto cualquiera *P* de la bisectriz a los lados del ángulo son iguales. En efecto: Si doblamos la figura por la bisectriz *OC*, el lado *OA* coincidirá con el lado *OB* y, como desde un punto a una recta no hay más que una perpendicular, el segmento *PM* coincidirá con el *PN*, es decir, *PM* = *PN*.

172. Trazado de perpendiculares con la escuadra y la regla. — Doblando dos veces un papel fuerte, de modo que en el segundo plegado el primer pliegue caiga sobre sí mismo, haremos que los dobleces obtenidos sean perpendiculares entre sí (fig. 75), lo que nos permitirá trazar rectas perpendiculares.

Pero lo más frecuente en dibujo es hacer uso de la *escuadra*, que es una lámina de madera o de plástico, dos de cuyos bordes o lados forman ángulo recto.

Antes de usar una escuadra conviene *comprobarla,* es decir, cerciorarse de si tiene bien construído el ángulo recto. Para ello, se apoya uno de los lados sobre una regla y se traza una línea a lo largo del otro lado; se invierte la escuadra, de manera que el primer lado siga apoyado en la regla, y se traza una nueva línea que tenga con la primera un punto común. Si las dos líneas no coinciden, la escuadra es defectuosa, como ocurre en el caso presentado en la figura 76.

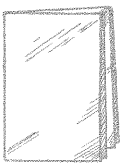


FIG. 75

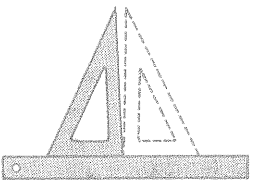


FIG. 76

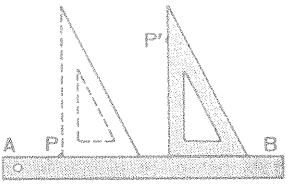


FIG. 77

PROBLEMA. — *Trazar la perpendicular a la recta* AB *por un punto.*

La solución es la misma, ya se trate de un punto P situado en la recta o bien de un punto P' exterior a ella (fig. 77).

Se hace coincidir con AB el borde de una regla y se aplica a él uno de los lados perpendiculares de la escuadra; se hace luego deslizar a ésta a lo largo de la regla, hasta que el otro lado perpendicular pase por el punto; bastará entonces hacer resbalar el lápiz por este lado y tendremos la perpendicular pedida.

173. Simetría respecto de un eje o simetría axial. — Hagamos a tinta en un papel un dibujo cualquiera (fig. 78, *a*) y, sin dejar secar la tinta, doblemos el papel tomando XY como eje; en la otra parte quedará señalada una nueva figura *b*), de la cual decimos que es simétrica de la primera respecto de la recta XY, llamada *eje de simetría.*

Las figuras simétricas respecto de un eje son *inversamente iguales,* porque para hacerlas coincidir es necesario hacer un *rebatimiento,* es decir, un doblamiento del plano que las contiene por el eje de simetría.

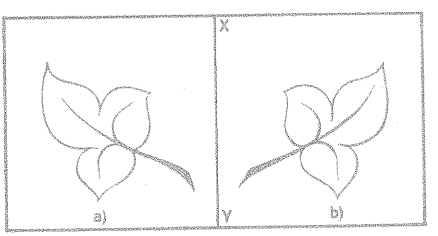


FIG. 78

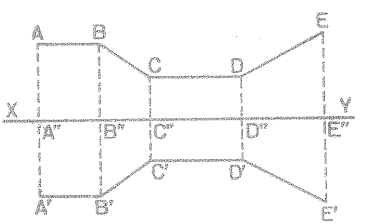


FIG. 79

La simetría axial es de mucha utilidad en la práctica. El sastre, por ejemplo, para cortar las diversas partes simétricas de una prenda, dobla la tela y la corta dirigiendo la tijera por la señal previamente marcada, según el patrón que antes dibujó.

174. Propiedad de las figuras simétricas respecto de un eje. — Sea la línea $ABCDE$ (fig. 79) y $A'B'C'D'E'$ su simétrica respecto del eje XY.

Si consideramos dos puntos simétricos cualesquiera A y A', vemos que al doblar el plano alrededor del eje XY, el punto A cae sobre el A' y la recta AA'' coincide con la $A'A''$. Por consiguiente, los ángulos $XA''A$ y $XA''A'$ son iguales y, por tanto, rectos. También son rectos, naturalmente, los ángulos $B''A''A$ y $B''A''A'$, como opuestos por el vértice que son de los anteriores. De todo esto se deduce que AA' es perpendicular al eje XY y, además, que $AA'' = A'A''$.

Igualmente demostraríamos que BB', CC', DD' y EE' son perpendiculares al eje XY, y que $BB'' = B'B''$, $CC'' = C'C''$, $DD'' = D'D''$ y $EE'' = E'E''$. Es decir, podemos enunciar la siguiente

> PROPIEDAD. — **Todos los segmentos que unen puntos simétricos son perpendiculares al eje de simetría y están divididos por él en dos partes iguales.**

De la propiedad anterior se deduce que es fácil obtener puntos simétricos, respecto de un eje, usando la escuadra y el transportador de segmentos.

175. Figuras con eje de simetría. — Se dice de una recta que es eje de simetría de una figura, cuando al doblar la figura por dicha recta coinciden las dos partes en que la recta divide a la figura.

EJEMPLOS. — La circunferencia y el círculo tienen por eje de simetría a un diámetro cualquiera (fig. 80, *a*).

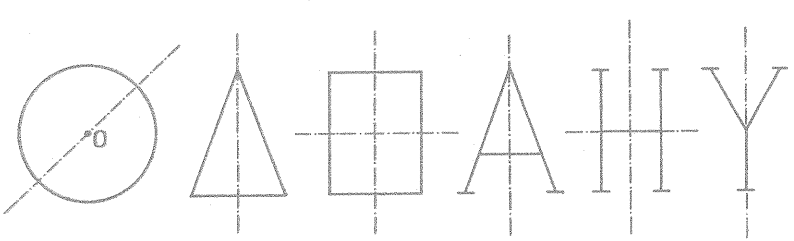


FIG. 80

Un segmento rectilíneo tiene por eje de simetría a su mediatriz (fig. 73).

Un ángulo tiene por eje de simetría a su bisectriz (fig. 74).

Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría, que es la bisectriz del ángulo opuesto a la base (fig. 80, *b*).

Un rectángulo tiene dos ejes de simetría, que son las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos (fig. 80, *c*).

Entre las letras mayúsculas hay varias que forman figuras simétricas respecto de uno o dos ejes. Así, la A y la Y tienen un eje de simetría (fig. 80, *d* y *f*), y la H tiene dos (fig. 80, *e*).

176. Trazado de perpendiculares con la regla y el compás. — En virtud de la propiedad de la mediatriz (núm. 170), para obtener la perpendicular a un segmento en su punto medio, basta hallar dos puntos equidistantes de los extremos y trazar la recta que determinan. Este es el fundamento de la resolución, mediante la regla y el compás, de los siguientes problemas gráficos:

PROBLEMA 1.° — *Trazar la mediatriz de un segmento.*

Sea el segmento *AB* (fig. 81) al que queremos trazar la mediatriz.

Según lo dicho anteriormente, bastará hallar dos puntos equidistantes de *A* y *B*, lo que se consigue dibujando dos circunferencias de igual radio y cuyos centros sean los puntos *A* y *B*. Las intersecciones de esas dos circunferencias, es decir, los puntos *C* y *D*, determinarán la perpendicular pedida. En la práctica, no se acostumbra a trazar las circunferencias completas, sino solamente arcos de las mismas.

Obsérvese también que el radio de las circunferencias ha de ser mayor que la mitad del segmento *AB*; de lo contrario, las circunferencias no se cortarían.

PROBLEMA 2.° — *Trazar la perpendicular a una recta desde un punto situado fuera de ella.*

Sea la recta *r* (fig. 82) y *P* el punto desde el cual deseamos trazar la perpendicular.

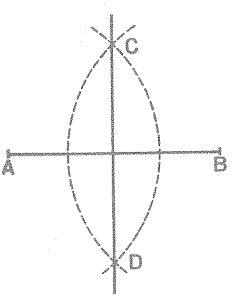


FIG. 81

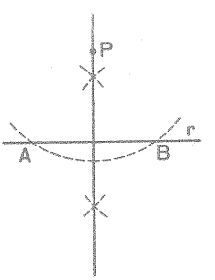


FIG. 82

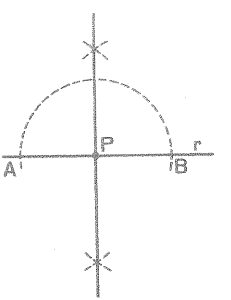


FIG. 83

Tomando el punto *P* como centro, describiremos un arco que corte a la recta en dos puntos *A* y *B*, con lo cual el problema queda reducido a trazar la mediatriz del segmento *AB*.

PROBLEMA 3.° — *Trazar la perpendicular a una recta por un punto situado en ella.*

Sea *r* (fig. 83) la recta dada y *P* el punto de ella por el cual deseamos trazar la perpendicular.

Haciendo centro en *P* se traza un arco que corte a la recta en dos puntos *A* y *B*, con lo cual el problema se reduce a trazar la mediatriz del segmento *AB*.

PROBLEMA 4.° — *Dividir un segmento rectilíneo en dos, en cuatro, en ocho, etc., partes iguales.*

La construcción indicada para trazar la mediatriz de un segmento sirve también para dividir a éste en dos partes iguales.

Si dividimos luego en dos partes iguales a cada una de las partes obtenidas, el segmento primero quedará dividido en 4 partes iguales.

Efectuando nuevas divisiones de esas partes, el segmento quedaría dividido en 8, en 16, etc., partes iguales.

PROBLEMA 5.° — *Hallar un punto que equidiste de otros tres dados, no situados en línea recta.*

Sean *A*, *B* y *C* los puntos dados (fig. 84). Se trazan las mediatrices *OD* y *OE* de los segmentos *AB* y *BC*, y el punto *O* de intersección será el pedido.

En efecto: dicho punto equidista de *A* y *B* por pertenecer a la mediatriz de *AB*, y equidista de *B* y *C* por estar en la mediatriz de *BC*; luego, equidista de *A*, *B* y *C*.

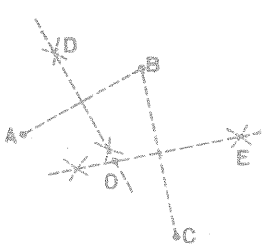


FIG. 84

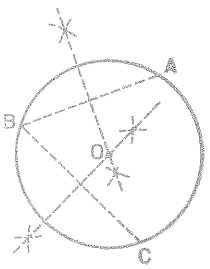


FIG. 85

Este problema suele enunciarse también así: *Trazar la circunferencia que pasa por tres puntos no situados en línea recta.*

Si los puntos son A, B y C (fig. 85), hallaremos el punto O que equidista de ellos, y dicho punto será el centro de la circunferencia pedida; para trazarla, tomaremos por radio la distancia de O a uno cualquiera de los puntos dados.

PROBLEMA 6.° — *Hallar el centro de una circunferencia o de un arco dados.*

Bastará trazar dos cuerdas cualesquiera y sus respectivas mediatrices; éstas se cortarán en un punto, que será el centro pedido.

EJERCICIOS

396. Acostumbrarse a trazar a pulso rectas perpendiculares.

397. Construir una escuadra de papel o cartulina y comprobar con ella las perpendiculares trazadas a pulso.

398. Dibujar una recta y trazarle la perpendicular que pase: 1.°, por un punto de la recta; 2.°, por un punto exterior a la recta. (Usar la regla y la escuadra).

399. Con la regla y la escuadra trazar perpendiculares a los lados de un ángulo, desde un punto de la bisectriz. Comprobar que las distancias del punto a los lados son iguales.

400. Trazar con la regla y la escuadra la perpendicular a un segmento en uno de los extremos.

401. Hallar la distancia de un punto a una recta y medir esa distancia.

402. Marcar en el papel tres puntos A, B y C y trazar desde cada uno de ellos la perpendicular a la recta determinada por los otros dos.

403. Comprobar primero, y luego demostrar, que las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares.

404. Dibujar un punto, un segmento rectilíneo, un ángulo, un triángulo y un cuadrilátero; hallar luego las correspondientes figuras simétricas, respecto de un eje elegido para cada caso.

405. Para hallar la distancia de un punto A a otro B, inaccesible (fig. 1), se dirigen visuales a B desde A y desde otro punto C, y se trazan luego las rectas AB' y CB' que formen con AC los mismos ángulos que las AB y CB. La distancia AB' es igual a la buscada. ¿Por qué?

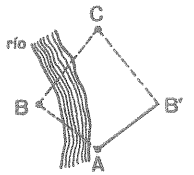


FIG. 1

FIG. 2

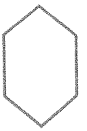


FIG. 3

FIG. 4

FIG. 5

406. Las figuras 2, 3, 4 y 5 tienen todas uno o dos ejes de simetría. Explicar por qué y determinar dichos ejes.

407. Averiguar cuáles de las letras del abecedario del tipo de las dibujadas (figuras 4 y 5) tienen uno o dos ejes de simetría.

408. Dados dos puntos *A* y *B* (fig. 6) y una recta *CD* que no les contiene, hallar un punto de dicha recta equidistante de *A* y *B*.

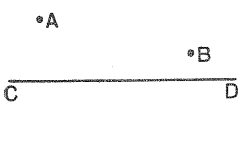


FIG. 6

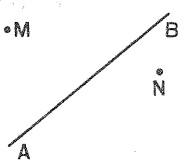


FIG. 7

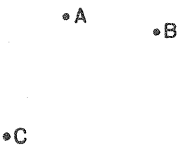


FIG. 8

409 La recta *AB* (fig. 7) representa una línea de ferrocarril, y los puntos *M* y *N* son dos pueblos. Si éstos desean construir una estación que se encuentre a igual distancia de ambos, ¿qué sitio habrá que elegir?

410 Tres familias tienen sus respectivas casas en *A*, *B* y *C* (fig. 8). Si quieren construir un pozo que se encuentre a la misma distancia de los tres, ¿qué lugar escogerán?

25. Relación entre ángulos y arcos

177. Arco correspondiente a un ángulo.

Arco correspondiente a un ángulo es el arco comprendido entre los lados, trazado con centro en el vértice y con un radio cualquiera.

Según esto, a un ángulo le corresponde un arco por cada radio que elijamos para trazarlo. Así, en el ángulo *AOB* (fig. 86) se han trazado los arcos correspondientes *MN*, *M'N'* y *M''N''*.

178. Ángulo central.— Dos radios *OA* y *OB* trazados en una circunferencia (fig. 87) forman un ángulo *AOB*, denominado *ángulo central*, y cuyo arco correspondiente es el arco comprendido entre los lados.

Ángulo central de un arco es el ángulo que tiene el vértice en el centro de la circunferencia, y los lados pasan por los extremos del arco.

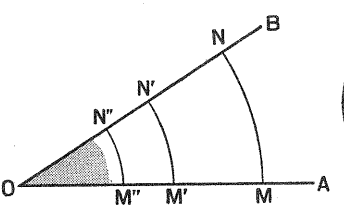


FIG. 86

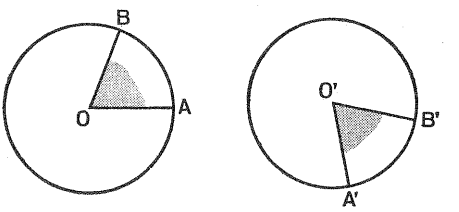


FIG. 87

179. Relación entre los ángulos y los arcos correspondientes trazados con el mismo radio.— *Si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes del mismo radio también lo son,* y recíprocamente: *si dos arcos son iguales, también son iguales los ángulos centrales correspondientes.*

En efecto: basta ver que si se superponen los ángulos *AOB* y *A'O'B'* (fig. 87), que suponemos iguales, al coincidir los pares de lados, el punto *A* caerá sobre *A'*, por

ser iguales los radios OA y $O'A'$, y el punto B caerá sobre B', por ser $OB = O'B'$ con lo cual resultará la coincidencia de los arcos AB y $A'B'$. Recíprocamente: si estos arcos son iguales, al superponerlos coincidirán los centros O y O', y los puntos A y B con los A' y B'; por tanto, coincidirán las semirrectas OA y $O'A'$, y las OB y $O'B'$.

180. Cuadrante. — Si en una circunferencia trazamos dos diámetros perpendiculares, la circunferencia quedará dividida en cuatro partes, que serán iguales por ser cada una de ellas el arco correspondiente a un ángulo recto. Cada una de esas partes se denomina *cuadrante*. Es decir:

> **Cuadrante es el arco correspondiente a un ángulo recto.**

181. Medida de arcos. Unidad.

> **Medir un arco es hallar las veces que contiene a otro arco de igual radio, tomado por unidad.**

Para medir arcos suele tomarse como unidad el cuadrante, pero por ser excesivamente grande se usan divisores de esa unidad, que son el grado, minuto y segundo sexagesimales; o el grado, minuto y segundo centesimales. En la *división sexagesimal,* el cuadrante se considera dividido en 90 partes iguales o grados; el grado, en 60 partes iguales o minutos, y el minuto en 60 partes iguales o segundos.

En la *división centesimal,* el cuadrante se divide en 100 partes iguales o grados; el grado, en 100 partes iguales o minutos, y el minuto, en 100 partes iguales o segundos.

182. Relación entre la medida de un ángulo y la de su arco correspondiente.

> **Cuando se toma como unidad de arcos el arco correspondiente a la unidad de ángulos, la medida de un ángulo es la misma que la de su arco correspondiente.**

Para explicar esto, consideremos un ángulo recto AOB (fig. 88). Su arco correspondiente, cualquiera que sea el radio con que se trace, es un cuadrante.

Si al ángulo recto AOB lo dividimos en nueve partes iguales, cada una de esas partes, es decir, cada uno de los ángulos AOC, COD, DOE, etc., medirá 10°; los arcos correspondientes, AC, CD, DE, etc., serán iguales entre sí y medirá cada uno

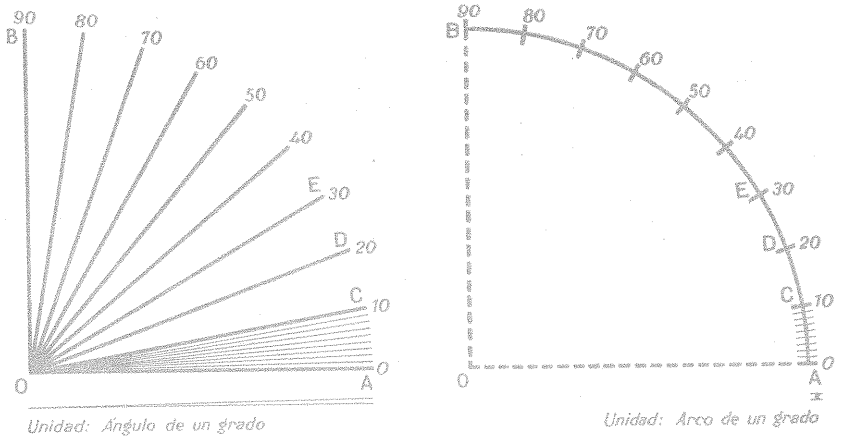


FIG. 88

de ellos 10°, por ser la novena parte del cuadrante. A un ángulo de 10° le corresponde por tanto, un arco de 10°.

Si dividimos ahora a cada uno de los ángulos *AOC, COD, DOE,* etc., en diez partes iguales, resultarán nuevos ángulos, cada uno de los cuales mide 1°, siendo también 1° la medida de su arco correspondiente. El mismo razonamiento nos haría ver que a un ángulo de 1′ le corresponde un arco de 1′, y a un ángulo de 1″, un arco de 1″.

Consideremos ahora un ángulo cualquiera, por ejemplo el que vale 36° 45′ 12″. Dicho ángulo comprende 36 ángulos de 1°, 45 de 1′ y 12 de 1″; y su arco correspondiente abarcará, por tanto, 36 arcos de 1°, 45 de 1′ y 12 de 1″.

De lo anterior se deduce que *todos los arcos correspondientes a un ángulo tienen la misma medida que él.* Por consiguiente, al hallar la medida de un ángulo (con el transportador o semicírculo graduado), hallamos al mismo tiempo la de uno cualquiera de sus arcos correspondientes.

183. Construcciones con la regla y el compás.

PROBLEMA 1.° — *Dado un ángulo, construir otro igual a él.*

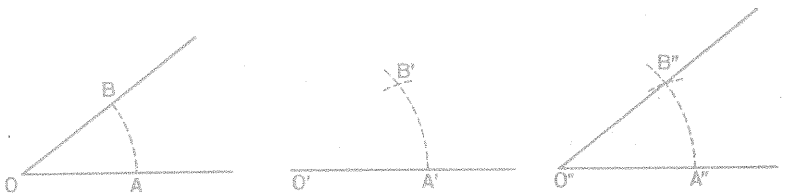


FIG. 89

Sea AOB (fig. 89) el ángulo dado. Se traza el arco correspondiente a dicho ángulo y luego, con el mismo radio, se traza otro arco que tenga por centro el extremo O' de una semirrecta $O'A'$, y se toma en él un arco $A'B'$ igual al AB. Finalmente, se unirá O' con B' y obtendremos un ángulo $A''O''B''$ igual al dado.

PROBLEMA 2.º — *Sumar ángulos.*

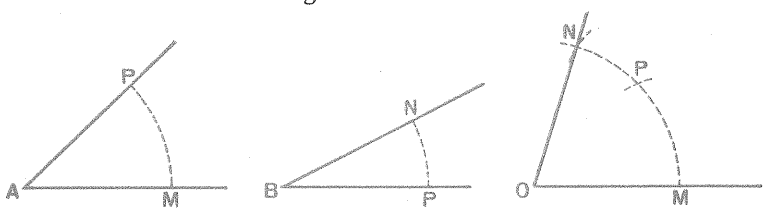


FIG. 90

Supongamos que son MAP y PBN (fig. 90) los ángulos que queremos sumar.

Se trazan primeramente con el mismo radio los arcos correspondientes a los ángulos dados, se suman luego dichos arcos y, por fin, se unen con su centro los extremos del arco que resulte. De este modo obtendremos el ángulo MON, que es la suma buscada.

PROBLEMA 3.º — *Restar ángulos.*

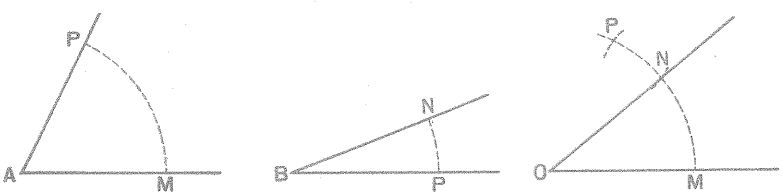


FIG. 91

Supongamos que del ángulo MAP se desea restar el PBN (fig. 91).

Se trazan con el mismo radio los arcos correspondientes a los ángulos dados, se restan dichos arcos, y se unen con su centro los extremos del arco que resulte. Obtendremos así el ángulo MON, que es la diferencia pedida.

PROBLEMA 4.º — *Multiplicar un ángulo por un número entero.*

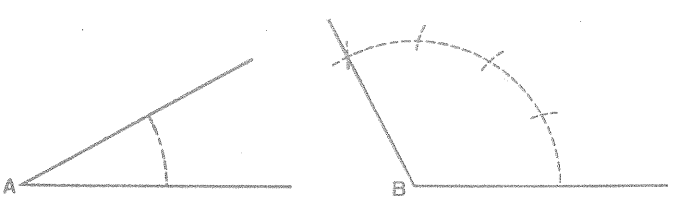


FIG. 92

Sea el ángulo A (fig. 92) que deseamos multiplicar por 4.

Bastará hallar la suma de cuatro ángulos iguales al A. Obtenemos así el ángulo B, que es el producto buscado.

PROBLEMA 5.° — *Dividir un ángulo en dos partes iguales por medio de su bisectriz.*

1) Sea el ángulo AOB (fig. 93). Se traza el arco correspondiente AB, y desde sus extremos A y B como centros se describen con un mismo radio dos arcos que se corten en un punto M. Este punto, unido con el vértice, da la bisectriz del ángulo.

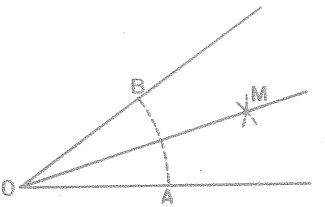


FIG. 93

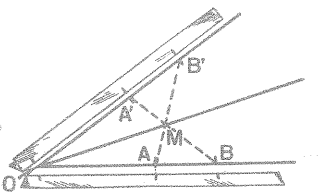


FIG 94

2) Cuando no se dispone de compás, se puede trazar la bisectriz de un ángulo del modo siguiente, mediante la regla y el transportador de segmentos:

Con el transportador, se marcan dos puntos A y B (fig. 94) en uno de los lados del ángulo y otros dos A' y B' en el otro, a iguales distancias respecto del vértice O. La intersección M de los segmentos que resultan de unir A con B' y B con A', determina con el vértice del ángulo la bisectriz pedida.

EJERCICIOS

411. ¿Cuántos arcos correspondientes a un ángulo se pueden trazar en él? ¿Cuántos ángulos corresponden a un arco dado?

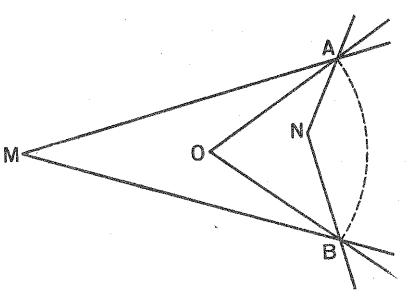


FIG. 1

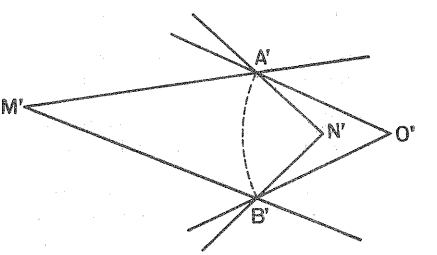


FIG. 2

412. Si los puntos O y O' son, respectivamente, los centros de los arcos AB y $A'B'$ (figs. 1 y 2), ¿cuáles serán los ángulos correspondientes a dichos arcos? Explicar la contestación.

413. Dibujar circunferencias y, mediante dobleces del papel, obtener cuatro cuadrantes. Ídem ocho octantes o sectores de 45°.

414. Dibújese una circunferencia y tómese una cuerda igual al radio. Medir luego con el transportador el arco subtendido por dicha cuerda. ¿Qué fracción de la circunferencia representa esa medida?

415. Construir un transportador o semicírculo graduado dividido de 5 en 5 grados sexagesimales y háganse con él medidas aproximadas de ángulos y arcos.

416. Trazar una circunferencia y efectuar en ella operaciones de sumar y restar arcos. Comprobar los resultados con el transportador.

417. Dibujar un ángulo obtuso y construir con la regla y el compás un ángulo igual. Repítase el ejercicio tres veces cambiando la amplitud del ángulo y la posición de los lados.

418. Dibújese un ángulo de 72° y trácese la bisectriz con regla y compás. Repetir el ejercicio tres veces cambiando el valor del ángulo. Comprobar en cada caso la exactitud de la operación midiendo los ángulos, o mejor, midiendo las distancias de un punto de la bisectriz a los lados del ángulo.

419 Trazar una circunferencia y limitar en ella un arco de 68°. Trácese luego el diámetro que divide al arco en dos partes iguales y estúdiense las propiedades de dicho diámetro.

420 Sobre una circunferencia se han tomado cinco puntos. De los cinco arcos consecutivos que determinan esos puntos, el primero mide 19° 22′ 34″, el segundo es doble del primero, el tercero es tres veces la suma de los anteriores y el cuarto es la cuarta parte de la suma de los tres primeros. ¿Cuánto mide el quinto?

421. Dos arcos consecutivos de una circunferencia miden uno 103° 17′ 32″ y otro 68° 43′ 8″. Sabiendo que el resto de la circunferencia se ha dividido en cinco partes iguales, se desea hallar la medida de cada una de ellas.

422. Una semicircunferencia se ha dividido en dos partes, tales que la mitad de una es igual a la tercera parte de la otra. ¿Cuánto miden esas partes?

423 Hallar la medida de dos arcos de circunferencia, sabiendo que su suma es 167° y que uno es igual a cinco veces el otro.

424. Hallar la medida de dos arcos de circunferencia, sabiendo que su diferencia es 123° y que uno es igual a nueve veces el otro.

26. Rectas paralelas

184. **Rectas paralelas.** — Dos rectas de un plano que no tienen ningún punto común se llaman *paralelas;* también se dice que una de las rectas es *paralela a la otra.*

Dos segmentos rectilíneos se dice que son paralelos cuando pertenecen a rectas paralelas.

185. **Existencia de paralelas.** — La definición anterior no nos permite averiguar prácticamente si dos rectas son paralelas, pues habría que prolongarlas indefinidamente, lo cual es imposible.

Lo que sí podemos afirmar es que, *en un plano, dos perpendiculares a una recta son paralelas entre sí.*

En efecto: dichas rectas no pueden tener ningún punto común, puesto que si tuvieran uno (fig. 95), por él pasarían dos perpendiculares a la misma recta, lo cual es imposible (núm. 167).

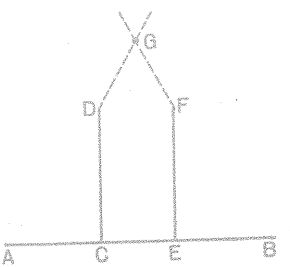


FIG. 95

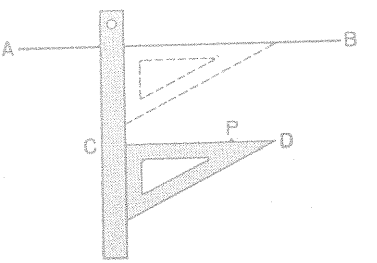


FIG. 96

186. **Trazado de paralelas con la regla y la escuadra.** — Como aplicación de lo dicho en el párrafo anterior, podemos resolver el siguiente

PROBLEMA. — *Trazar una paralela a una recta por un punto dado.*

Sea *AB* la recta a la cual queremos trazar una paralela que pase por el punto *P* (figura 96).

Se coloca la escuadra de modo que uno de sus bordes perpendiculares coincida con la recta *AB* y sobre el otro borde perpendicular se aplica la regla. Se hace lue-

go resbalar la escuadra a lo largo de la regla, hasta que el otro lado perpendicular pase por el punto P; bastará entonces trazar una línea a lo largo de este borde y tendremos la paralela pedida.

En efecto: AB y CD serán paralelas, ya que ambas son perpendiculares al borde de la regla.

187. Postulado de Euclides: consecuencias. — El procedimiento anterior nos da una paralela por un punto a una recta. El llamado *postulado de Euclides* (*) establece que dicha paralela es única. Se enuncia así:

> **Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a dicha recta.**

CONSECUENCIAS:

1) *Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.*

En efecto: si AB y CD (fig. 97) son paralelas a EF, dichas rectas AB y CD serán paralelas entre sí, pues de lo contrario tendrían un punto G común y por él pasarían dos paralelas a EF.

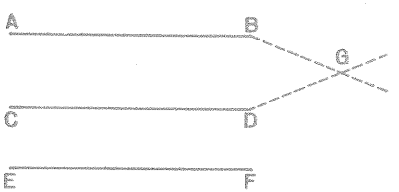


FIG. 97

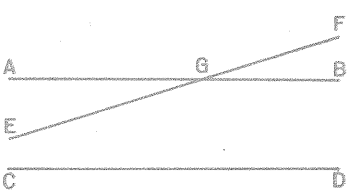


FIG. 98

2) *Si una recta corta a una de dos paralelas, corta también a la otra.*

En efecto: sean AB y CD dos rectas paralelas (fig. 98); si EF corta a AB en G, también cortará a CD, pues de lo contrario EF sería paralela a CD y por G pasarían dos paralelas a CD.

3) *Si una recta es perpendicular a una de dos paralelas, lo es también a la otra.*

En efecto: sean AB y CD dos rectas paralelas (fig. 99); si MN es perpendicular a AB, también lo será a CD, pues de lo contrario podríamos trazar otra $C'D'$ que lo fuera, y tendríamos desde el punto N dos paralelas a AB.

(*) *Postulado* es una afirmación que se toma como cierta sin demostrarla.

EUCLIDES *el Geómetra* (315-225 antes de Jesucristo) nació en Tiro y enseñó en Alejandría, donde escribió sus *Elementos de Geometría*.

188. Ángulos formados por dos rectas cortadas por una secante. — Cuando dos rectas *AB* y *CD* (fig. 100) son cortadas por otra *GH* (a la que llamamos secante o transversal), se forman ocho ángulos.

Para abreviar, los designaremos por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, como indica la figura.

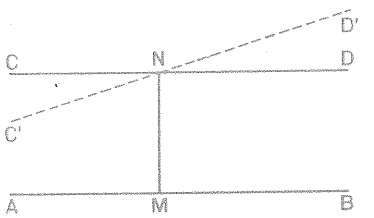


FIG. 99

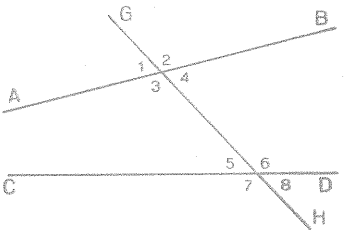


FIG. 100

Los ángulos 1, 2, 7 y 8 se llaman *externos* y los 3, 4, 5 y 6, *internos*.

Alternos internos son los internos situados a distinto lado de la secante y no adyacentes: 3 y 6; 4 y 5.

Alternos externos son los externos situados a distinto lado de la secante y no adyacentes: 1 y 8; 2 y 7.

Correspondientes son uno interno y otro externo situados a igual lado de la secante y no adyacentes: 1 y 5; 3 y 7; 2 y 6; 4 y 8.

189. Paralelas cortadas por una secante. — Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante:

> **Los ángulos alternos internos son iguales.**
> **Los ángulos alternos externos son iguales.**
> **Los ángulos correspondientes son iguales.**

Es fácil comprobar estas propiedades:

1.º *Los ángulos alternos internos son iguales.* Sean *AB* y *CD* (fig. 101, *a)* dos rectas paralelas cortadas por la secante *GH* y tracemos la perpendicular *MN* a las paralelas, pasando por el punto *O*, que es el punto medio del segmento *EF*.

Las figuras a uno y otro lado del punto *O* son iguales, pues coinciden si se hace girar a una un ángulo llano con centro en *O*. En efecto: la semirrecta *OG* viene sobre *OH*, el punto *E* sobre el *F* y la semirrecta *OM* sobre *ON*. La recta *AB* (que pasa por *E* y es perpendicular a *MN*) vendrá sobre *CD* (que pasa por *F* y es perpendicular a *MN*). Como consecuencia, el ángulo 3 coincidirá con el 6. Y si el 3 es igual al 6, también lo serán el 4 y el 5, por tener el mismo suplemento (fig. 101, *b*).

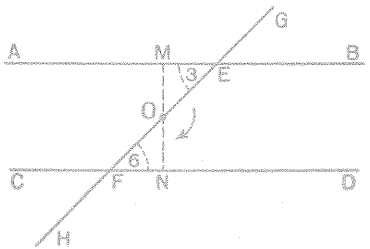


FIG. 101, *a*

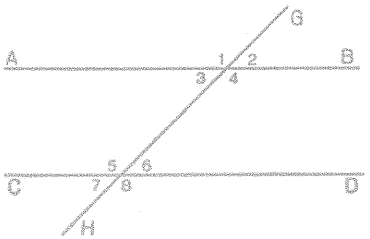


FIG. 101, *b*

2.º *Los ángulos alternos externos son iguales.* El 1 es igual al 8, por ser opuestos por el vértice, respectivamente, del 4 y del 5, que son iguales. Asimismo, y por análoga razón, el 2 es igual al 7.

3.º *Los ángulos correspondientes son iguales.* Por un razonamiento semejante al anterior probaríamos que $\hat{1} = \hat{5}$, $\hat{3} = \hat{7}$, $\hat{2} = \hat{6}$ y $\hat{4} = \hat{8}$.

Recíprocamente: Dos rectas son paralelas si al cortarlas por una secante se forman ángulos que reúnen alguna de estas condiciones:

Los ángulos alternos internos son iguales.
Los ángulos alternos externos son iguales.
Los ángulos correspondientes son iguales.

190. OBSERVACIÓN. — Teniendo en cuenta esto último, se deduce que la construcción de paralelas con la regla y la escuadra puede hacerse siguiendo el procedimiento antes indicado (186), aun cuando no se use para el trazado el borde de la escuadra perpendicular a la regla. Así, las rectas *AB* y *CD* (fig. 102) son paralelas por tener dos ángulos correspondientes iguales.

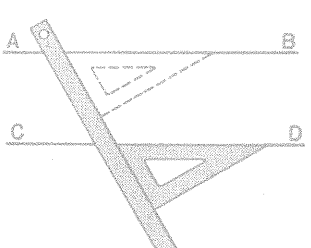


FIG. 102

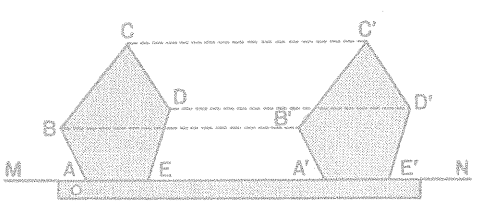


FIG. 103

191. Movimiento de traslación. — En la construcción de paralelas con la regla y la escuadra, movemos la escuadra sobre el plano del dibujo, de modo que uno de los bordes de la misma va deslizándose sobre el borde fijo de la regla. Este movimiento es una *traslación*, y el borde de la regla es la *guía* de la traslación.

> **Movimiento de traslación es aquel en que el plano se desliza sobre sí mismo, de modo que sus puntos describen rectas paralelas a una dirección, llamada guía de la traslación.**

En la figura 103 se representa el traslado de un polígono sobre la recta *MN* como guía. Podríamos realizar dicha traslación recortando el polígono en una cartulina y haciéndolo luego resbalar sobre la mesa, apoyado en una regla.

PROPIEDADES DE UNA TRASLACIÓN. — Fácilmente se deducen las siguientes:

1) **Después de la traslación, cualquier figura se transforma en otra igual.** Así, el polígono $A'B'C'D'E'$ (fig. 103) es igual al $ABCDE$.

2) **Una recta no paralela a la guía y su transformada son paralelas entre sí.** Así, son paralelas AB y $A'B'$; BC y $B'C'$, CD y $C'D'$, etc.

3) **Todos los puntos de la figura trasladada describen paralelas.** Son paralelas AA', BB', CC', DD', etc.

4) **Todos los puntos se desplazan al mismo tiempo una misma longitud.** O sea, que $AA' = BB' = CC' = DD'$, etc.

192. Segmentos de paralelas entre paralelas. — *Los segmentos de rectas paralelas comprendidos entre paralelas son iguales.*

En efecto: si observamos la figura 104, vemos que, de acuerdo con las propiedades citadas anteriormente, en la traslación que lleva AB sobre $A'B'$, al tomar por guía la recta XY, el punto B permanece siempre sobre la paralela $X'Y'$ a XY. Y como cuando el punto A está en A' el B está en B', tendremos que $AB = A'B'$ y $AA' = BB'$.

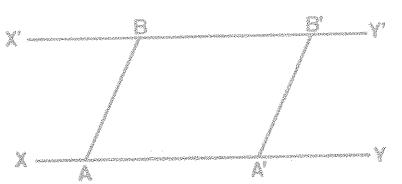


FIG. 104

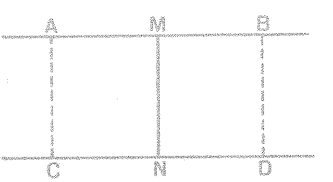


FIG. 105

193. Distancia entre dos paralelas. — Los puntos de una recta *AB* (figura 105) equidistan de una paralela *CD*.

Se trata, en efecto, de un caso particular de la traslación estudiada en el párrafo anterior, cuando *AC* es perpendicular a la guía *CD*. Por tanto, $AC = MN = BD$.

> **Se llama distancia entre dos rectas paralelas a cualquiera de los segmentos de perpendicular comprendido entre las dos.**

194. Ángulos de lados paralelos. — Dos ángulos que tienen los lados respectivamente paralelos son *iguales* o *suplementarios:*

> **Son IGUALES si sus lados son dos a dos del mismo sentido o dos a dos de sentidos contrarios; y son SUPLEMENTARIOS si dos lados son del mismo sentido y los otros dos de sentido contrarios.**

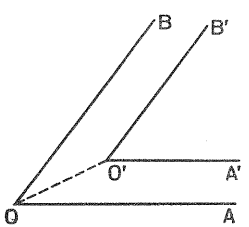


FIG. 106

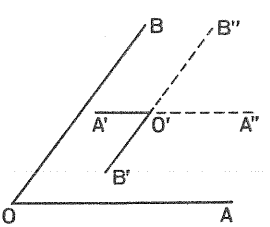


FIG. 107

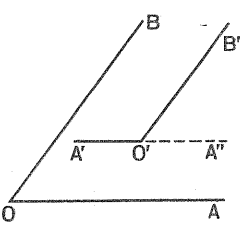


FIG. 108

Sean los ángulos *AOB* y *A'O'B'* (figs. 106, 107 y 108), que tienen los lados respectivamente paralelos.

En la figura 106 podemos hacerlos coincidir con sólo efectuar una traslación, tomando *OO'* como guía.

En la figura 107, llevaremos primero el *AOB* sobre *A''O'B''* por la traslación antes indicada, y luego se colocará sobre el *A'O'B'* por medio de una rotación de 180°.

Por último, en la figura 108 vemos que *AOB* es igual al *A''O'B'*, y como éste es adyacente a *A'O'B'*, los ángulos en cuestión, *AOB* y *A'O'B'*, serán suplementarios.

195. Ángulos de lados perpendiculares. — Dos ángulos de lados respectivamente perpendiculares son *iguales* o *suplementarios:*

Son IGUALES si son ambos agudos o ambos obtusos, y SUPLEMENTARIOS si son uno agudo y otro obtuso.

Supongamos los ángulos 1 y 2 (figs. 109 y 110), que tienen los lados respectivamente perpendiculares. Si al ángulo 2 le imprimimos una rotación de 90°, tomará la posición 2', con los lados paralelos a los del 1. Ahora bien: 1 y 2' son iguales (fig. 109) o suplementarios (fig. 110); luego lo mismo sucederá con los 1 y 2.

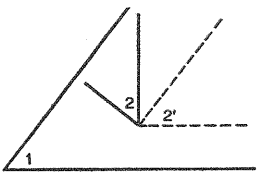


FIG. 109

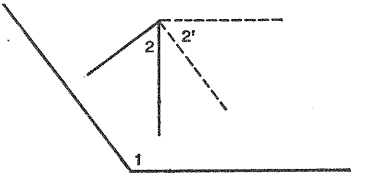


FIG. 110

196. Trazado de paralelas con la regla y el compás. — Veamos cómo se resuelve el problema de *trazar la paralela a una recta por un punto.*

Sea *AB* la recta y *P* el punto (fig. 111, *a*). 1.° Con centro en *P* y con un radio cualquiera se traza un arco *CM* que corte a la recta. 2.° Con centro en *M* e igual radio que antes se traza el arco *PN*. 3.° Se toma la cuerda *NP* del segundo arco y se lleva sobre el primero *MC*. La recta *PC* será la solución del problema (fig. 111, *b*).

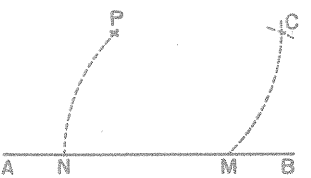


FIG. 111, *a*

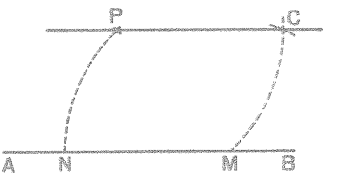


FIG. 111, *b*

En efecto: nos hemos limitado a construir dos ángulos alternos internos iguales, formados por las rectas *AB* y *PC* al ser cortadas por la secante que determinan los puntos *P* y *M*. Luego, *PC* es paralela a *AB*.

EJERCICIOS

425. Trazar paralelas a una recta dada: 1.º, a pulso; 2.º, con la escuadra; 3.º, con la regla y el compás.

426. En la figura 1, las rectas son paralelas dos a dos. Se trata de: 1.º, nombrar los ángulos que son iguales; 2.º, nombrar los ángulos que son suplementarios; 3.º, decir por qué $d = j$; 4.º, decir por qué k es suplementario de b.

427. En la figura 2, las rectas AB y CD son paralelas, y FG y EH son bisectrices de los ángulos BFE y FEC. Probar: 1.º, que $a = b$; 2.º, que $a + b + d = 2$ rectos.

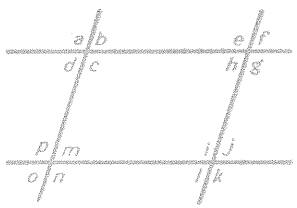


FIG. 1

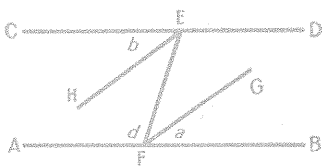


FIG. 2

428. En la figura 3, la recta BE es paralela a AC. Probar: 1.º, que $A = a$; 2.º, que $C = b$; 3.º, que $CBD = A + C$; 4.º, que $A + C + c = 2$ rectos.

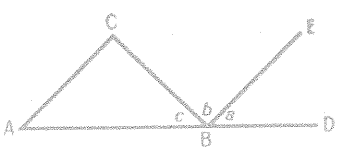


FIG. 3

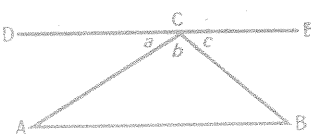


FIG. 4

429. En la figura 4, DE es paralela a AB. Probar que $A + B + ACB = 2$ rectos.

430. En la figura 5, AC, BD y FG son paralelas, así como AB y EF. Probar: 1.º, que $a = d$; 2.º, que $a + g = 2$ rectos; 3.º, que $b + e = 2$ rectos.

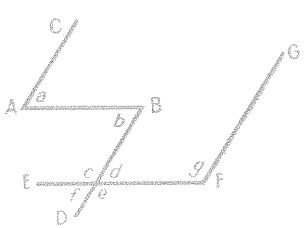


FIG. 5

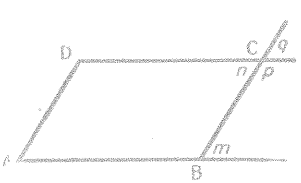


FIG. 6

431. En la figura 6, AB y DC son paralelas y también AD y BC. Probar: 1.º, que $A = n$; 2.º, que $D + m = 2$ rectos; 3.º, que $A + p = 2$ rectos.

432. En la figura 7, AF es bisectriz de BAC, y DE es paralela a AB. Probar que $a = b$.

433. En la figura 8, AB y CD son paralelas. Probar que $EFG = a + b$.

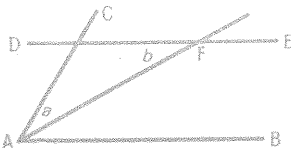


FIG. 7

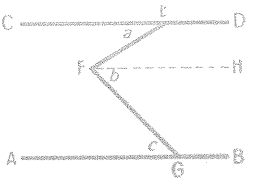


FIG. 8

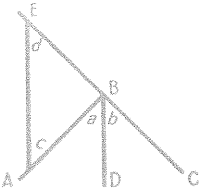


FIG. 9

434. En la figura 9, AB es perpendicular a EC, BD es bisectriz de ABC, y AE es paralela a BD. Probar: 1.º, que $a = d$; 2.º, que $b = c$; 3.º, que $ABC = c + d$; 4.º, que $ABE + c + d = 2$ rectos.

27. Posiciones de rectas y circunferencias

197. Posiciones relativas de una recta y una circunferencia. — Una recta puede tener tres posiciones con relación a una circunferencia situada en su mismo plano:

1.ª La recta puede ser *exterior* a la circunferencia, no teniendo con ella ningún punto común (recta *EF*, fig. 112).

En este caso, la distancia del centro de la circunferencia a la recta es *mayor* que el radio de la circunferencia ($OP > r$).

2.ª La recta puede ser *tangente* a la circunferencia, o sea, tener con ella un punto común solamente (recta *CD*, fig. 112).

Observando la figura, deducimos:

> **Toda recta tangente a la circunferencia, es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.**

Por tanto, la distancia del centro a la tangente es *igual* al radio ($NO = r$).

3.ª La recta, finalmente, puede ser *secante* a la circunferencia, o sea, tener con ella dos puntos comunes (recta *AB*, fig. 112).

En este caso, la distancia del centro de la circunferencia a la recta es *menor* que el radio ($OM < r$).

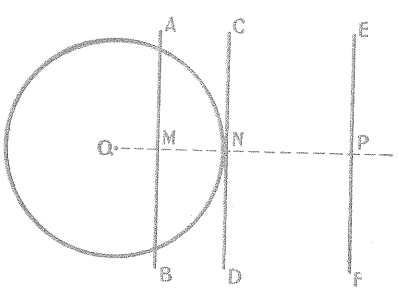


FIG. 112

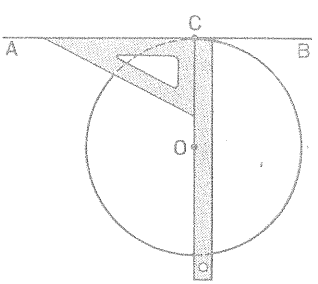


FIG. 113

198. Trazado de la tangente a una circunferencia por un punto de la misma. — La propiedad enunciada de ser la tangente perpendicular al radio en el punto de contacto, es el fundamento para el trazado de rectas tangentes a circunferencias o de circunferencias tangentes a rectas.

Sea, por ejemplo, la circunferencia O (fig. 113) y supongamos que se le quiere trazar la tangente por el punto C.

Bastará dibujar el radio que pasa por C y, por medio de la escuadra o con el compás, se traza en ese punto la perpendicular AB al radio.

199. Diámetro perpendicular a una cuerda. — Sea el diámetro CD (figura 114), perpendicular a la cuerda AB. Como todo diámetro es eje de simetría de la circunferencia, al doblar la figura en torno al diámetro CD, la semirrecta EB seguirá la dirección de la EA y el punto B caerá sobre el A. De donde se sigue que

$$EA = EB, \qquad \text{arco } AC = \text{arco } CB, \qquad \text{arco } AD = \text{arco } DB$$
$$\text{y} \quad \text{ángulo } AOC = \text{ángulo } BOC.$$

El diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y a los arcos subtendidos por ella en dos partes iguales.

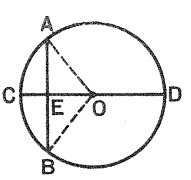


FIG. 114

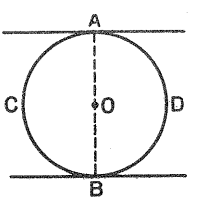


FIG. 115

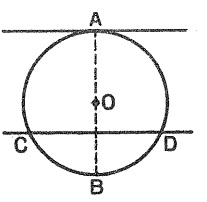


FIG. 116

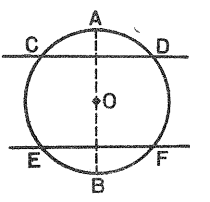


FIG. 117

200. Arcos de circunferencia comprendidos entre rectas paralelas. — Las rectas paralelas pueden ser las dos tangentes (fig. 115), una tangente y otra secante (fig. 116), y las dos secantes (fig. 117).

En los tres casos, si trazamos el diámetro AB perpendicular a las rectas paralelas, veremos que la figura es simétrica respecto de dicho diámetro. Luego, tendremos:

$$\text{arco } ACB = \text{arco } ADB \text{ (fig. 115)} \qquad \text{arco } AC = \text{arco } AD \text{ (fig. 116)}$$
$$\text{arco } CE = \text{arco } DF \text{ (fig. 117)}$$

Los arcos de circunferencia comprendidos entre paralelas son iguales.

201. Posiciones relativas de dos circunferencias. — Dos circunferencias situadas en un mismo plano pueden ser:

1.° *Exteriores.* Todos los puntos de una de ellas están fuera de la otra (fig. 118).

La distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.

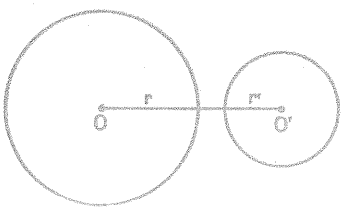


FIG. 118

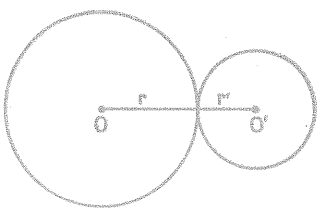


FIG. 119

2.° *Tangentes exteriores.* Las circunferencias tienen un punto común y todos los demás de cada una son exteriores a la otra (fig. 119).

La distancia de los centros es igual a la suma de los radios.

3.° *Secantes.* Las circunferencias tienen dos puntos comunes (figura 120).

La distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.

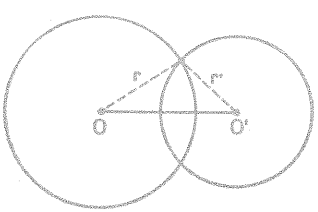


FIG. 120

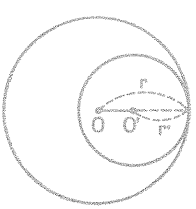


FIG. 121

4.° *Tangentes interiores.* Las circunferencias tienen un solo punto común y una de ellas es interior a la otra (fig. 121).

La distancia de los centros es igual a la diferencia de los radios.

5.º *Interiores.* Una circunferencia es interior a la otra, y no tienen ningún punto común (fig. 122).

La distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.

6.º *Concéntricas. Es un caso particular del anterior.* Son dos circunferencias interiores cuyos centros coinciden (fig. 123).

La distancia de los centros es nula.

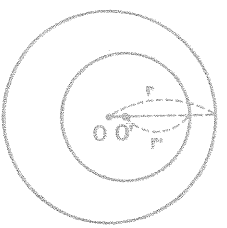


FIG. 122

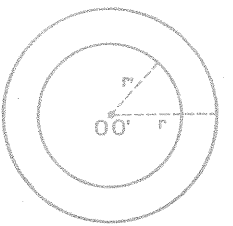


FIG. 123

RESUMEN. — **Si representamos por d la distancia entre los centros y por r y r′ los radios, tendremos:**

Circunferencias exteriores	$d > r + r'$
Tangentes exteriores	$d = r + r'$
Secantes	$r + r' > d > r - r'$
Tangentes interiores	$d = r - r'$
Interiores	$d < r - r'$
Concéntricas	$d = 0$

EJERCICIOS

435. Una circunferencia tiene 26 dm de radio. ¿Cuál será la posición respecto de ella de una recta que diste del centro: 1.º, 3 m; 2.º, 260 cm; 3.º, 9 dm?

436. Dada una recta *AB* y un punto *O* que diste de ella 47 mm, ¿cuál será la posición de dicha recta respecto de las circunferencias que tienen por centro *O* y cuyos radios midan: 1.º, 2 cm; 2.º, 35 mm; 3.º, 4'7 cm; 4.º, 5 cm; 5.º, 1 dm?

437. Trazar una recta tangente a una circunferencia de radio conocido (25 mm, por ejemplo) en un punto dado: 1.º, con la regla y la escuadra; 2.º, con la regla y el compás.

438. Trazar una circunferencia de radio conocido (22 mm, por ejemplo), que sea tangente a una recta en un punto dado: 1.º, con la regla y la escuadra; 2.º, con la regla y el compás.

439. Trazar una circunferencia que sea tangente a una recta dada AB en uno de sus puntos, P, y pase a la vez por un punto C no situado en la recta.

440. Se tiene un punto A situado a 6 cm del centro de una circunferencia de 37 mm de radio. ¿Cuál es la mayor y la menor distancia de ese punto a la circunferencia?

441. Decir cuál es la posición relativa de dos circunferencias cuyos radios y distancia de los centros son: 1.º, $r = 11$ m, $r' = 7$ m, $d = 52$ dm; 2.º, $r = 5$ cm, $r' = 4$ cm, $d = 58$ mm; 3.º, $r = 49$ m, $r' = 12$ m, $d = 19$ m; 4.º, $r = 7$ dm, $r' = 6$ dm, $d = 1'3$ m.

442. Dos circunferencias tienen por radios 9 cm y 17 cm. Decir cuál será su posición relativa cuando sus centros disten: 1.º, 3 dm; 2.º, 8 cm; 3.º, 2'6 dm; 4.º, 0'6 dm; 5.º, 2 dm.

443. Dibújese una circunferencia de centro O y radio igual a 24 mm; haciendo luego centro en un punto O', situado a 37 mm de O, trazar otra circunferencia que sea tangente a la primera. (Hay dos soluciones).

444. Dibújese una circunferencia de radio igual a 3 cm y trácese otra de 2 cm de radio que sea tangente a la primera en un punto dado A. ¿Cuánto distarán los centros de esas dos circunferencias? (Hay dos soluciones).

445. Supuesta una circunferencia de 3'5 cm de radio, ¿dónde se hallarán los centros de todas las circunferencias que sean tangentes interiores a la primera y tengan 2 cm de radio? ¿Y si fueran tangentes exteriores?

28. Polígonos: triángulos

202. Línea quebrada y línea poligonal. — *Línea quebrada* es la formada por varios segmentos consecutivos no situados en línea recta (figuras 124 y 125).

La línea quebrada se llama *poligonal* cuando es cerrada (fig. 126).

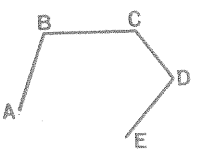


FIG. 124

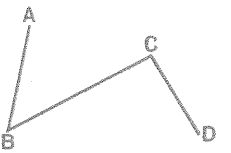


FIG. 125

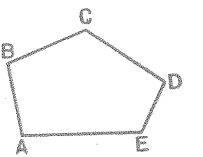


FIG. 126

Se llaman *lados* de una línea quebrada o polígonal, los segmentos que la forman; y *vértices,* las intersecciones de cada dos lados consecutivos.

203. Polígonos. — *Polígono es la porción de plano limitada por una línea poligonal.*

No es lo mismo un polígono que la línea poligonal que lo limita: el polígono es una superficie y la línea poligonal es sólo el contorno. Sin embargo, por extensión, se da también el nombre de polígono a la línea que lo limita.

Lados y *vértices del polígono* son los lados y vértices de la poligonal.

Diagonal de un polígono es el segmento rectilíneo que une dos vértices no consecutivos: *BD, BE, BF* (fig. 127).

Perímetro de un polígono es la suma de sus lados.

Un polígono se designa colocando una letra en cada vértice y enunciando todas las letras en el orden en que aparecen al recorrer el contorno del polígono en un sentido determinado. Diremos, por ejemplo, el polígono *ABCDEF* (fig. 127).

Un polígono se llama *convexo,* si cada una de las rectas que contienen a sus lados deja a todo el polígono en un mismo semiplano respecto

de ella. En caso contrario, se llama *cóncavo*. Solamente nos ocuparemos de los polígonos convexos.

Ángulos interiores de un polígono o *ángulos de un polígono* son los que tienen por vértices los del polígono y por lados las semirrectas que contienen cada dos lados consecutivos: *ABC* (fig. 127).

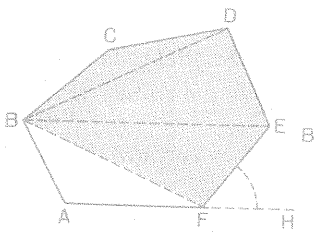


FIG. 127

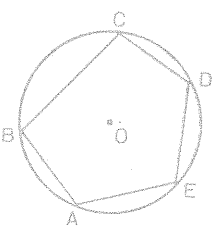


FIG. 128

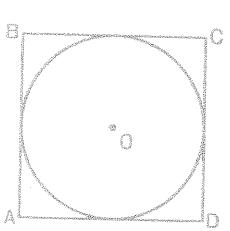


FIG. 129

Ángulos exteriores de un polígono son los adyacentes de los interiores: *EFH* (fig. 127). Para cada ángulo interior hay dos exteriores, pero ambos son iguales.

Polígono inscrito en una circunferencia es el que tiene los vértices sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas (fig. 128); entonces se dice que la circunferencia está *circunscrita* al polígono.

Polígono circunscrito en una circunferencia es el que tiene todos sus lados tangentes a la circunferencia (fig. 129); en este caso se dice que la circunferencia está *inscrita* en el polígono.

CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS. — *a)* Por el número de lados:

Triángulo,	3 lados	**Eneágono,**	9 lados
Cuadrilátero,	4 lados	**Decágono,**	10 lados
Pentágono,	5 lados	**Endecágono,**	11 lados
Hexágono,	6 lados	**Dodecágono,**	12 lados
Heptágono,	7 lados	**Pentadecágono,**	15 lados
Octágono,	8 lados	**Icoságono,**	20 lados

Los demás se llaman polígonos de 13, 14, 17, ... lados.

b) Por la igualdad de lados y ángulos:

Equilátero, si tiene todos sus lados iguales.
Equiángulo, si tiene todos sus ángulos iguales.
Regular, si tiene todos los lados y ángulos iguales.

204. Suma de los ángulos exteriores e interiores de un polígono.

1) La suma de los ángulos exteriores (uno por cada vértice) de un polígono es igual a un giro o 360°.

En efecto: Sea, por ejemplo, el pentágono *ABCDE* (fig. 130, *a*). Si suponemos orientado a dicho polígono en el sentido en que hemos designado a sus letras y prolongamos los lados de acuerdo con esa orientación, quedarán determinados todos los ángulos exteriores (1, 2, 3, 4 y 5, en la figura).

Tracemos luego por un punto cualquiera *O* (fig. 130, *b*) semirrectas paralelas a las *AB, BC, CD, DE* y *EA*, y de su mismo sentido. Se forman así alrededor de *O* los ángulos 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, iguales a los exteriores del polígono, por tener los lados paralelos y de los mismos sentidos. Pero la suma de estos ángulos es, evidentemente, un ángulo completo o giro; luego, si designamos por *E* a la suma de los ángulos exteriores de un polígono, podemos escribir:

$$E = 1 \text{ giro} = 2 \text{ llanos} = 4 \text{ rectos} = 360°$$

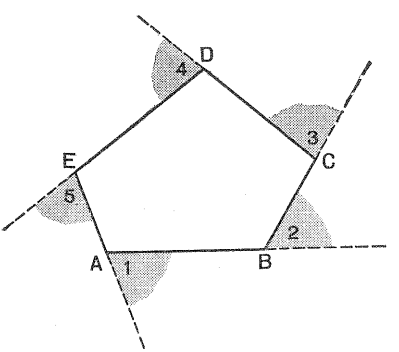


FIG. 130, *a*

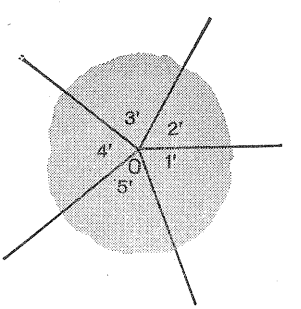


FIG. 130, *b*

2) La suma de los ángulos interiores y exteriores de un polígono de n lados es igual a n llanos, o sea, n × 180°.

En efecto: Basta ver que en cada vértice la suma del ángulo interior más el exterior es igual a un ángulo llano. Luego, si designamos por I la suma de los ángulos interiores, tendremos:

$$I + E = n \text{ llanos} = n \times 180°$$

3) La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es (n−2) llanos, o sea, (n−2) × 180°.

En efecto: Si $I + E = n$ llanos y $E = 2$ llanos, resulta:

$$I = (I+E) - E = (n-2) \text{ llanos} = (n-2) \times 180°$$

205. Número de diagonales de un polígono. — El número d de diagonales de un polígono de n lados es

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

En efecto: Cada vértice de un polígono de n lados se puede unir con $n - 3$ vértices para obtener otras tantas diagonales (fig. 127). Por cada vértice hay, pues, $n - 3$ diagonales. Como hay n vértices, parece que el total de diagonales debería ser $n(n-3)$; pero como cada diagonal une dos vértices, en realidad son $\frac{n(n-3)}{2}$.

206. Polígonos iguales. — *Dos polígonos son iguales cuando llevado uno sobre otro se les puede hacer coincidir.*

Es evidente que, para que dos polígonos coincidan, han de tener respectivamente iguales sus lados y sus ángulos. Los lados, ángulos y demás elementos de dos polígonos que coinciden en la superposición se llaman *elementos homólogos.*

TRIÁNGULOS

207. Triángulo — *Triángulo es el polígono de tres lados.*

Diremos que un ángulo y un lado de un triángulo son *opuestos,* cuando el vértice del ángulo no está en el lado; y que son *adyacentes* a un lado los ángulos cuyos vértices son los extremos de ese lado. Así, en el triángulo ABC (fig. 131), el lado BC tiene por opuesto el ángulo BAC, y por adyacentes los ángulos ABC y ACB.

Siempre que no haya confusión, se acostumbra a designar los ángulos de un triángulo con la letra del vértice, y los lados por la letra minúscula correspondiente a la del vértice opuesto. Así, en el triángulo *ABC*, diremos que los ángulos *A*, *B*, *C*, se oponen respectivamente a los lados *a*, *b*, *c*.

Además de los lados, ángulos, vértices y perímetro, pueden considerarse en un triángulo los siguientes elementos: *bases, alturas, medianas, mediatrices* y *bisectrices*.

Cualquier lado de un triángulo puede considerarse como *base*.

Se llama *altura* correspondiente a un lado, al segmento de perpendicular trazado a dicho lado desde el vértice opuesto. El pie de la altura correspondiente a un lado puede estar en dicho lado (*AD*, fig. 132) o en su prolongación (*AD*, fig. 133). En un triángulo hay tres alturas (fig. 134), las cuales se cortan en un punto llamado *ortocentro*.

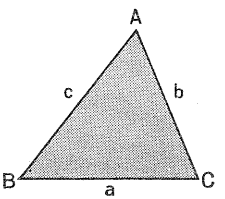


FIG. 131

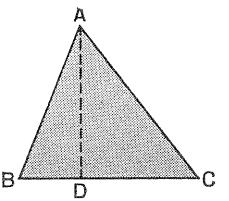


FIG. 132

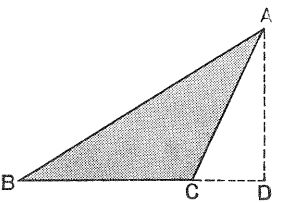


FIG. 133

Se llaman *medianas* de un triángulo a los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto (fig. 135). En un triángulo hay tres medianas y se cortan en un punto denominado *baricentro*.

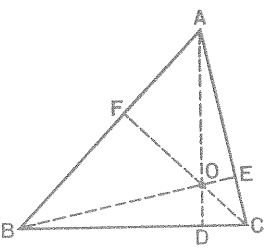


FIG. 134. — Alturas: *ortocentro*

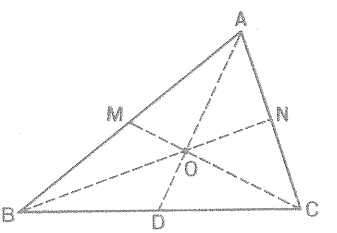


FIG. 135. — Medianas: *baricentro*

Mediatrices de un triángulo son las mediatrices de sus lados (fig. 136). En un triángulo hay tres mediatrices, las cuales se cortan en un punto llamado *circuncentro*.

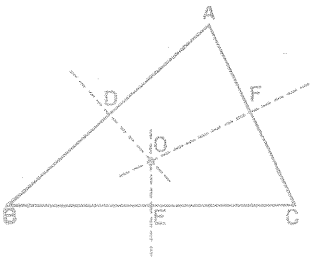


FIG. 136. — Mediatrices: *circuncentro*

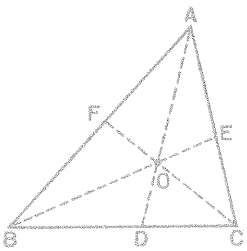


FIG. 137. — Bisectrices: *incentro*

Bisectrices de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos (fig. 137). Un triángulo tiene tres bisectrices, las cuales se cortan en un punto llamado *incentro.*

208. Suma de los ángulos de un triángulo.

La suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano o 180°.

Aplicando la fórmula deducida en 204, 3.º, vemos que ha de ser así; pero probémoslo de otro modo. Si en el triángulo *ABC* (fig. 138) trazamos por el vértice *A* una paralela al lado opuesto *BC,* tendremos:

$$\hat{1} + \hat{2}' + \hat{3}' = 1 \text{ llano} = 180°$$

y como $\hat{2}' = \hat{2}$ y $\hat{3}' = \hat{3}$, por alternos internos, resulta:

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 1 \text{ llano} = 180°$$

Para comprobar esta propiedad, podemos recortar los ángulos de un triángulo de papel (fig. 139, *a*) y luego sumarlos, colocándolos como indica la figura 139, *b.*

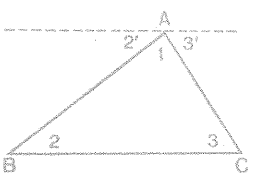


FIG. 138

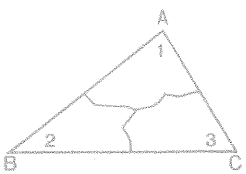


FIG. 139, *a*

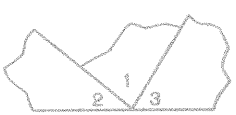


FIG 139. *b*

209. Relación entre los lados de un triángulo — Como un segmento rectilíneo es menor que cualquier quebrada que termine en sus extremos, se deduce que *en todo triángulo, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*

Por tanto, *para que tres segmentos puedan formar triángulo, es necesario que el mayor sea menor que la suma de los otros dos.*

Según esto, tres segmentos que midan, por ejemplo, 15 cm, 9 cm y 3 cm, no podrán formar triángulo, porque $15 > 9 + 3$.

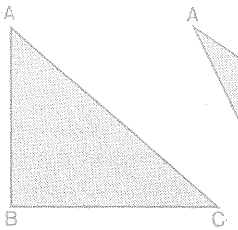


FIG. 140. — Tr. rectángulo

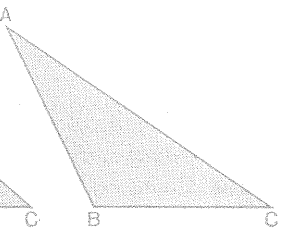


FIG. 141. — Tr. obtusángulo

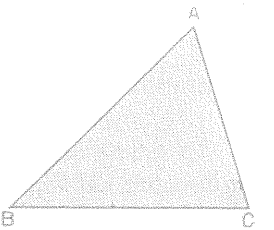


FIG. 142. — Tr. acutángulo

210. Clasificación de los triángulos. — 1) Atendiendo a sus ángulos, un triángulo puede ser:

Rectángulo, si tiene un ángulo recto (fig. 140).

Obtusángulo, si tiene un ángulo obtuso (fig. 141).

Acutángulo, si tiene los tres ángulos agudos (fig. 142).

En los triángulos rectángulos, los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos,* y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa.*

2) Atendiendo a sus lados, un triángulo puede ser:

Equilátero, si tiene los tres lados iguales (fig. 143).

Isósceles, si tiene dos lados iguales (fig. 144).

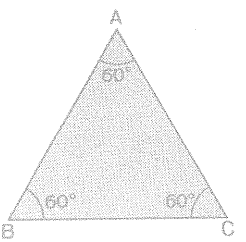


FIG 143. — Tr. equilátero

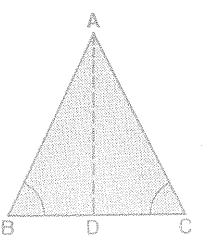


FIG. 144. — Tr. isósceles

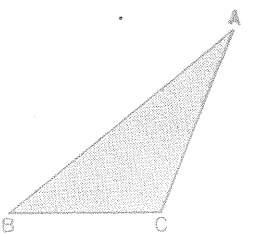


FIG. 145. — Tr. escaleno

Escaleno, si tiene los tres lados desiguales (fig. 145).

En el triángulo isósceles se acostumbra a tomar por base el lado desigual.

211. Propiedades de los triángulos isósceles. — Sea *ABC* (fig. 144) un triángulo isósceles, en el que $AB = AC$.

Si doblamos la figura por *AD,* bisectriz del ángulo *A,* veremos que *ABD* coincide con *ACD,* lo cual nos dice que *AD* es un eje de simetría del triángulo *ABC.* Según esto, podemos enunciar:

Todo triángulo isósceles tiene un eje de simetría, que es la bisectriz del ángulo opuesto a la base.

De esta simetría, resulta:

1.° *Los ángulos opuestos a los lados iguales son también iguales.*

2.° *La altura, la mediana y la mediatriz del lado desigual coinciden con la bisectriz del ángulo opuesto. Dicha recta divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos iguales.*

212. Propiedades de los triángulos equiláteros. — Como los lados de un triángulo equilátero son dos a dos iguales, podemos aplicar a cada par de lados lo dicho para los triángulos isósceles, y resulta:

1.° *En todo triángulo equilátero, los tres ángulos son iguales. Es decir, todo triángulo equilátero es también equiángulo.*

Como entre los tres ángulos suman dos rectos, cada ángulo valdrá $\frac{2}{3}$ de recto, o sea 60° (fig. 143).

2.° *Las tres medianas de un triángulo equilátero son también alturas, mediatrices y bisectrices.*

3.° *Todo triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría.*

213. Construcción de triángulos. Casos de igualdad.

PROBLEMA 1.° — *Construir un triángulo del que se conoce un lado* a *y los dos ángulos* B *y* C *adyacentes a ese lado* (fig. 146).

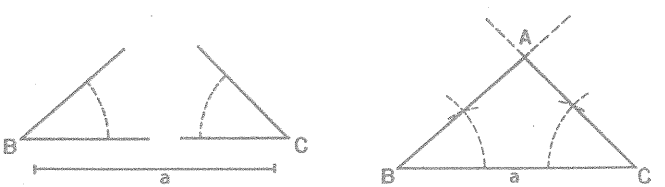


FIG. 146

Se traza un segmento *BC* igual al lado conocido y se construyen luego en sus extremos ángulos *B* y *C* respectivamente iguales a los dados; el punto *A* de intersección de los lados de estos ángulos será el tercer vértice, quedando así formado el triángulo pedido.

Para que el problema sea posible, la suma de los ángulos dados ha de ser menor que dos rectos.

De la construcción anterior se deduce que:

Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.

PROBLEMA 2.º — *Construir un triángulo, conocidos dos lados* a *y* b *y el ángulo* C *comprendido entre ellos* (fig. 147).

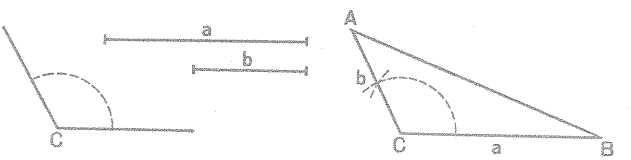


FIG. 147

Se construye un ángulo *C* igual al dado y se toma en uno de sus lados la distancia $CB = a$ y en el otro la distancia $CA = b$. Bastará luego unir *A* con *B* con un segmento *BA* para obtener el triángulo pedido.

El problema es siempre posible.

De la construcción anterior se deduce que:

Dos triángulos son iguales si tienen dos lados respectivamente iguales e igual el ángulo comprendido.

PROBLEMA 3.º — *Construir un triángulo del que se conocen sus tres lados* a, b, c (fig. 148).

Se toma un segmento $BC = a$, y desde sus extremos como centro, se trazan circunferencias con radios *b* y *c* respectivamente. Si estas circunferencias se cortan, uno de los puntos de intersección, unido con los extremos del segmento *BC*, da un triángulo que es solución del problema, puesto que sus tres lados son iguales a los segmentos dados.

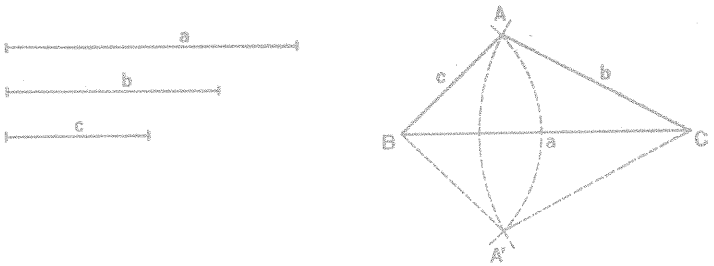


FIG. 148

Aunque haya dos puntos de intersección, los dos triángulos a que dan lugar son iguales, por ser simétricos; puede decirse, por tanto, que, en realidad, el problema tiene una solución.

La condición para que exista esta solución es que las circunferencias trazadas se corten, es decir, que el segmento *a* sea menor que la suma de los otros dos (201, 3.°).

De la construcción anterior se deduce que:

Dos triángulos son iguales si tienen los tres lados respectivamente iguales.

214. **Construcción de triángulos rectángulos.** — Las construcciones explicadas en el párrafo anterior sirven para los triángulos rectángulos; pero es conveniente estudiar dos más, que no son casos particulares de las anteriores.

PROBLEMA 1.° — *Construir un triángulo rectángulo del que se conoce la hipotenusa* a *y un cateto* b (fig. 149).

La condición para que exista el triángulo es que *a* sea mayor que *b*.

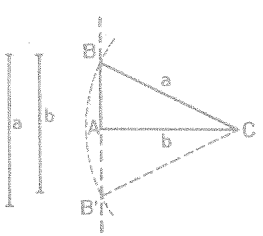


FIG. 149

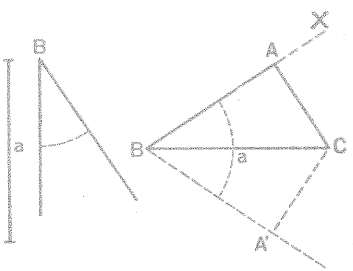


FIG. 150

Se toma un segmento $AC = b$, y desde uno de sus extremos como centro se traza una circunferencia de radio igual a la hipotenusa a. Los puntos B y B' de intersección con la perpendicular a b trazada en el otro extremo dan las soluciones. Ahora bien: como estos puntos son simétricos, los dos triángulos obtenidos son iguales, es decir, no hay más que una solución.

De la construcción anterior se deduce que:

Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un cateto.

PROBLEMA 2.º — *Construir un triángulo rectángulo del que se conoce la hipotenusa* a *y un ángulo agudo* B (fig. 150).

Se toma un segmento $BC = a$, y en uno de sus extremos se construye un ángulo igual al B. La perpendicular CA al lado BX, trazada por el extremo C de BC, completará el triángulo pedido. La solución es única.

De la construcción anterior se deduce que:

Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un ángulo agudo.

EJERCICIOS

446. Aplicando las fórmulas deducidas en los párrafos 204 y 205, calcular: 1.º, la suma de los ángulos exteriores; 2.º, la suma de los ángulos interiores; 3.º, el número de diagonales de los siguientes polígonos:

triángulo	hexágono	eneágono	dodecágono
cuadrilátero	heptágono	decágono	pentadecágono
pentágono	octágono	endecágono	icoságono.

447. Dibujar triángulos rectángulos, obtusángulos y acutángulos.

448. Dibujar triángulos equiláteros, isósceles y escalenos.

449. En un triángulo, el ángulo A vale 46° 23′ 38″ y el B es igual a 97° 52′ 12″. ¿Cuánto vale el ángulo C?

450. En un triángulo rectángulo, un ángulo vale 37° 29′ 44″. ¿Cuánto vale el otro ángulo agudo?

451. ¿Cuánto valen los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles?

452. En un triángulo isósceles, el ángulo desigual vale 76° 22′ 54″. ¿Cuánto vale cada uno de los ángulos iguales?

453. En un triángulo isósceles, el ángulo opuesto a la base vale 61° 46′ 32″. ¿Cuánto valen los otros?

454. En un triángulo isósceles, cada uno de los ángulos adyacentes a la base vale 69° 45′ 36″. ¿Cuánto vale el opuesto?

455. En un triángulo, $A = 28° 31' 18''$ y B es el doble de A. ¿Cuánto vale C?

456. En un triángulo, $A = 19° 46' 38''$ y B es el cuádruplo de A. ¿Cuánto vale C?

457. En un triángulo, $A = 72°$ y $B = 2\,C$. Hallar la medida de B y C.

458. Calcular la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que uno es igual a cinco veces el otro.

459. Hallar la medida de los ángulos de un triángulo isósceles, sabiendo que el ángulo desigual es la cuarta parte de cada uno de los otros dos.

460. Calcular el ángulo que forman al cortarse las bisectrices de dos ángulos de un triángulo, sabiendo que el tercer ángulo del triángulo mide 67° 42′.

461. Hallar cuánto mide el ángulo que forman al cortarse las bisectrices de dos ángulos de un triángulo equilátero.

462. Las bisectrices de los ángulos iguales de un triángulo isósceles forman un ángulo de 104° 20′. Hallar la medida de cada uno de los ángulos del triángulo.

463. Los ángulos iguales de un triángulo isósceles miden 72° 8′. ¿Cuánto mide el ángulo formado por las bisectrices de estos ángulos?

464. Averiguar si pueden formar triángulo tres segmentos, a, b y c, en cada uno de los siguientes casos: 1.°, $a = 40$ dm, $b = 2'7$ m, $c = 150$ cm; 2.°, $a = 6$ m, $b = 32$ dm, $c = 185$ cm; 3.°, $a = 29$ dm, $b = 423$ cm, $c = 65$ dm.

465. En un triángulo isósceles, un lado mide 3 cm y otro 45 mm. ¿Cuánto mide el tercero? Hágase el dibujo y dígase si hay más de una solución.

466. Hallar el perímetro de un triángulo isósceles, sabiendo que un lado mide 28 cm y otro 4'3 dm. ¿Cuántas soluciones hay?

467. El perímetro de un triángulo isósceles es 12 cm. Si uno de los lados mide 4'5 cm ¿cuánto miden los otros dos? ¿Hay más de una solución?

468. El perímetro de un triángulo isósceles es 27'5 m. Calcular las medidas de los lados, sabiendo que uno es doble del otro.

29. Cuadriláteros

215. Cuadriláteros. — *Se llama cuadrilátero al polígono que tiene cuatro lados.*

De acuerdo con lo estudiado para los polígonos en general:

> **1) Un cuadrilátero tiene dos diagonales.**
> **2) La suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual a cuatro rectos, o 360°.**

Se llaman *vértices opuestos* en un cuadrilátero a dos vértices no pertenecientes a un mismo lado. *Ángulos opuestos* son los correspondientes a vértices opuestos, y *lados opuestos* son dos lados no consecutivos.

216. Clasificación de los cuadriláteros. — Los cuadriláteros se clasifican, atendiendo al paralelismo de los lados opuestos, en:

> **TRAPEZOIDES, si no tienen ningún par de lados paralelos.**
> **TRAPECIOS, si tienen dos lados paralelos y los otros dos no.**
> **PARALELOGRAMOS, si los cuatro lados son paralelos dos a dos.**

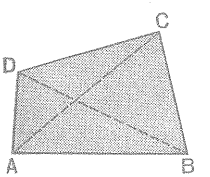


FIG. 151. — Trapezoide

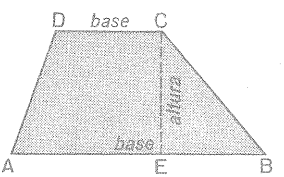


FIG. 152. — Trapecio

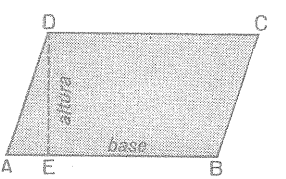


FIG. 153. — Paralelogramo

En un trapecio, se llaman *bases* a los lados *AB* y *DC* paralelos, y *altura* a la distancia *CE* entre las bases (fig. 152).

En los paralelogramos, se considera como *base* uno cualquiera de sus lados, *AB* por ejemplo; *altura* es la perpendicular *DE* trazada a la base desde un punto del lado opuesto.

217. Propiedades de los paralelogramos. — He aquí las principales:

1.ª *Los lados opuestos son iguales,* por ser partes de paralelas comprendidas entre paralelas (núm. 192).

2.ª *Los ángulos opuestos son iguales,* por tener sus lados respectivamente paralelos y de sentidos opuestos; *y los ángulos consecutivos son suplementarios,* por tener sus lados paralelos, dos del mismo sentido y dos de sentidos opuestos (núm. 194).

3.ª *Cada diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos iguales.*

En efecto: Sea el paralelogramo *ABCD* (fig. 154) en el que hemos trazado una de sus diagonales, *DB.* Esta diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos *ADB* y *CBD* que son iguales, por tener un lado común *DB* e iguales los ángulos adyacentes a él ($1 = 1'$ y $2 = 2'$), como alternos internos entre paralelas.

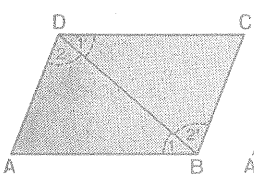


FIG. 154

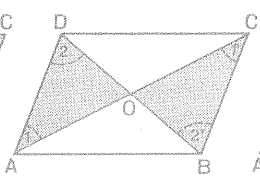


FIG. 155

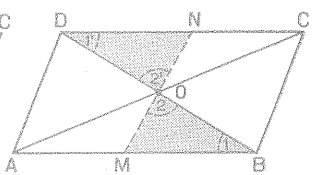


FIG. 156

4.ª *Las diagonales se cortan en su punto medio.*

En efecto: Si en el paralelogramo *ABCD* (fig. 155) trazamos las dos diagonales, se forman los triángulos sombreados *AOD* y *COB,* que son iguales por tener un lado igual ($AD = CB$) e iguales los ángulos adyacentes a él ($1 = 1'$, $2 = 2'$), como alternos internos entre paralelas.

De la igualdad de los triángulos *AOD* y *COB* se deduce la de sus lados homólogos $OA = OC$ y $OD = OB$.

5.ª *El punto de intersección de las diagonales es centro de simetría del paralelogramo.*

Para probar que el punto *O* (fig. 156) es centro de simetría del paralelogramo *ABCD,* bastará demostrar que todo segmento rectilíneo *MN* que pase por *O* y tenga sus extremos en el contorno, queda dividido por dicho punto en dos partes iguales.

En efecto: Los triángulos *BOM* y *DON* son iguales por tener un lado igual ($OB = OD$) e iguales los ángulos adyacentes a él ($1 = 1'$ y $2 = 2'$). Luego, $OM = ON$.

218. Las cinco propiedades anteriores son características de los paralelogramos, es decir que, todo cuadrilátero que cumple una de ellas es un paralelogramo y cumple todas las demás. Por ejemplo, diremos:

1.° *Si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos iguales dos a dos, es un paralelogramo.*

En efecto: Supongamos un cuadrilátero convexo *ABCD* (fig. 157) con los lados opuestos iguales dos a dos, es decir, $AB = DC$ y $AD = CB$. Trazando la diagonal *DB* se forman los triángulos *ADB* y *CBD*, los cuales son iguales por tener sus lados respectivamente iguales; de donde resulta la igualdad de los ángulos 1 y 1′ y 2 y 2′. Pero los ángulos 1 y 1′ son alternos internos, formados al cortar *DB* a las rectas *AB* y *DC*; luego, estas rectas serán paralelas. De la misma manera, de la igualdad de los ángulos 2 y 2′, se deduce el paralelismo de *AD* y *BC*.

2.° *Si un cuadrilátero tiene dos lados iguales y paralelos, es un paralelogramo.*

Supongamos que en el cuadrilátero *ABCD* (fig. 158) el lado *AB* es igual y paralelo al *DC*. En este caso, la igualdad de los triángulos *ADB* y *CBD* resulta de la igualdad de dos de sus lados, $DB = DB$ y $AB = DC$, y la de los ángulos comprendidos $1 = 1'$ (por alternos internos entre paralelas).

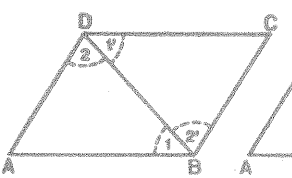


FIG. 157

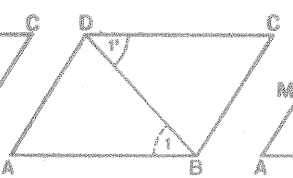


FIG. 158

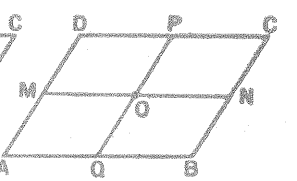


FIG. 159

219. Paralelas medias. — *El segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de un paralelogramo es igual y paralelo a los otros dos lados, y se llama paralela media.*

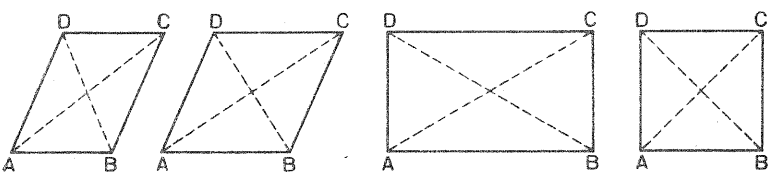
En efecto: Sea el paralelogramo *ABCD* (fig. 159), en el que hemos unido los puntos medios *M* y *N* de dos lados opuestos *AD* y *BC*. El cuadri-

látero *ABNM* formado es paralelogramo por tener iguales y paralelos los lados *AM* y *BN*; de donde resulta que *MN* es igual y paralelo a *AB*, y, por tanto, a *DC*.

En un paralelogramo hay *dos paralelas medias*, y ambas pasan por el centro *O* de simetría.

220. Clasificación de los paralelogramos. — Los paralelogramos se clasifican en *romboides, rombos, rectángulos* y *cuadrados*.

> **ROMBOIDE es el paralelogramo que tiene los lados oblicuos y desiguales.**
>
> **ROMBO es el paralelogramo que tiene los lados oblicuos e iguales.**
>
> **RECTÁNGULO es el paralelogramo que tiene los lados consecutivos perpendiculares y desiguales.**
>
> **CUADRADO es el paralelogramo que tiene los lados consecutivos iguales y perpendiculares.**



Romboide — Rombo — Rectángulo — Cuadrado

221. Propiedades de las diagonales.

1.ª *En el romboide y en el rombo las diagonales son desiguales, mientras que en el rectángulo y en el cuadrado son iguales.*

2.ª *En el romboide y en el rectángulo las diagonales son oblicuas entre sí, mientras que en el rombo y en el cuadrado son perpendiculares.*

222. Simetría en los paralelogramos. — Teniendo en cuenta las definiciones dadas para figuras con centro o con eje de simetría (núms. 158 y 175), se deduce que:

1.º *Todo paralelogramo tiene un centro de simetría, que es el punto de intersección de las diagonales.*

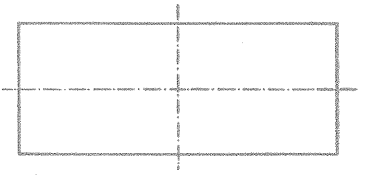


FIG. 160

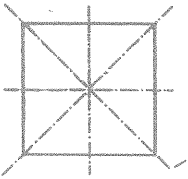


FIG . 161

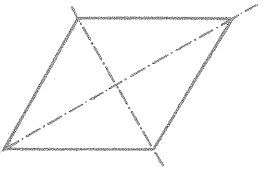


FIG. 162

2.° *El rectángulo tiene dos ejes de simetría, que son las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos* (fig. 160).

3.° *El cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, que son sus dos diagonales y las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos* (figura 161).

4.° *El rombo tiene dos ejes de simetría, que son sus diagonales* (figura 162).

5.° *El romboide no tiene ningún eje de simetría.*

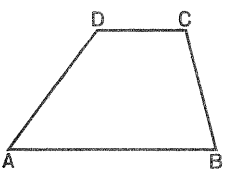


FIG. 163

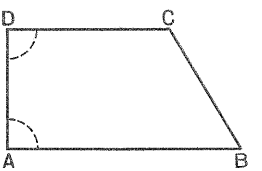


FIG. 164 — Tr. rectángulo

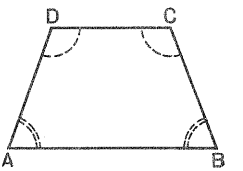


FIG. 165. — Tr. isósceles

223. Clases de trapecios. — Las figuras 163, 164 y 165 muestran las distintas clases de trapecios. El primero no recibe nombre especial.

> **TRAPECIO RECTÁNGULO es el que tiene uno de los lados no paralelos perpendicular a las bases. Dos de sus ángulos son rectos.**
>
> **TRAPECIO ISÓSCELES es el que tiene iguales los lados no paralelos. Los ángulos adyacentes a cada base son iguales entre sí.**

224. Paralela media de un trapecio. — *El segmento que tiene por extremos los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es paralelo a las bases e igual a su semisuma.*

A este segmento se le llama *paralela media* o *base media* del trapecio.

En efecto: Sea el trapecio *ABCD* (fig. 166) y *MN* el segmento que une los puntos medios de sus lados no paralelos. Si hacemos girar al trapecio un ángulo de 180° alrededor de uno de dichos puntos *N*, obtendremos un trapecio, que junto con el dado forman un paralelogramo *ADA'D'*. El segmento *MN* y su simétrico *NM'* constituyen la paralela media *MM'* de dicho paralelogramo, que, como sabemos, es igual al lado *AD'*, es decir, a la suma de las bases del trapecio. Por consiguiente, *MN* (mitad de *MM'*) es paralelo a *AB* y *DC* e igual a su semisuma.

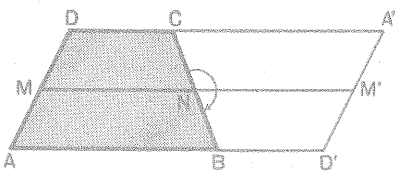


FIG. 166

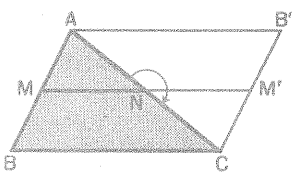


FIG. 167

225. Paralela media de un triángulo. — *El segmento que tiene por extremos los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.*

A este segmento se le llama *paralela media* correspondiente al tercer lado del triángulo.

En efecto: Supongamos un triángulo *ABC* (fig. 167), en el que se ha trazado el segmento *MN* que une los puntos medios de los lados *AB* y *AC*. Si imprimimos a dicho triángulo un giro de 180° alrededor de *N*, se obtiene un triángulo simétrico, que junto con el dado forman el paralelogramo *ABCB'*. El segmento *MN* y su simétrico *NM'* constituyen la paralela media *MM'* de dicho paralelogramo, que es igual, como sabemos, al lado *BC*. Por consiguiente, *MN* es paralelo a *BC* y por ser mitad de *MM'*, también lo será de *BC*.

EJERCICIOS

469. Formar un cuadro-resumen con las distintas clases de cuadriláteros y dibujarlos a pulso.

470. Construir un rectángulo uno de cuyos lados mida 4'5 cm y tenga 130 mm de perímetro.

471. Construir un rectángulo cuya diagonal mida 41 mm y uno de los lados 2'3 centímetros.

472. Construir un paralelogramo que tenga un ángulo de 60° y los lados midan 4 cm y 18 mm.

473. Construir un paralelogramo cuyas diagonales se corten formando un ángulo de 120° y midan 67 mm y 54 mm.

474. Construir un rombo, conociendo: 1.°, el lado (l = 3 cm) y un ángulo (A = 60°); 2.°, el lado (l = 35 mm) y una diagonal (d = 55 mm); 3.°, las dos diagonales (d = 5 cm y d' = 3'6 cm).

475. Construir un cuadrado cuyo lado mida 3 cm de longitud.

476. Construir un rectángulo de 35 mm de base y 2 cm de altura.

477. Construir un cuadrado cuya diagonal mide 46 mm.

478. Construir un trapecio rectángulo, conociendo: base mayor, 48 mm; base menor, 2'5 cm, y altura, 2 cm.

479. Construir un trapecio isósceles, siendo: base mayor, 4'8 cm; base menor, 32 mm, y altura, 23 mm.

480. Construir un trapecio isósceles, conociendo: base mayor, 56 mm; altura, 25 mm, y uno de los lados no paralelos, 32 mm.

481. Tres ángulos de un cuadrilátero miden, respectivamente: $A = 45° \ 27' \ 38''$; $B = 123° \ 52' \ 19''$; $C = 68° \ 41' \ 10''$. ¿Cuánto vale el cuarto ángulo D?

482. El lado menor de un rectángulo es los $\frac{5}{8}$ del mayor, cuya medida es de 56 decímetros. ¿Cuál es, en metros, el perímetro de dicho rectángulo?

483. El perímetro de un rectángulo es igual al de un cuadrado cuyo lado mide 17'2 metros. Se desea averiguar los lados del rectángulo, sabiendo que uno mide 6'8 metros más que el otro.

484. Un jardín en forma de cuadrado cuyo lado mide 19 m, se ha rodeado por una verja que ha costado 16.758 ptas. ¿A cómo resultó el metro de verja?

485. Las bases de un trapecio miden respectivamente 37 cm y 61 cm. ¿Cuánto medirá el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos?

486. La base menor de un trapecio mide 23 cm y la paralela media 4 dm. ¿Cuánto medirá la base mayor?

487. Probar que las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo forman, al cortarse, un rectángulo.

488. Probar que las bisectrices de los ángulos de un rectángulo forman, al cortarse, un cuadrado.

489. Probar que si una diagonal de un paralelogramo es bisectriz de uno de los ángulos, el paralelogramo es un rombo.

490. En un trapecio isósceles *ABCD* se toman en la base mayor *AB* segmentos *AM* y *BN* iguales. Probar que los segmentos *DN* y *CM* son también iguales.

491. Probar que si se unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un rectángulo resulta un rombo.

492. Un ángulo exterior de un rombo es $\frac{1}{3}$ de su adyacente interior. ¿Cuánto vale cada uno de los ángulos interiores de dicho rombo?

493. Probar que si en un trapecio *ABCD*, las bisectrices de los ángulos *C* y *D* se cortan en la base *AB*, dicha base es igual a la suma de los lados no paralelos.

494. Probar que la base media de un trapecio divide a las diagonales en dos partes iguales.

495. Probar que si se unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera, resulta un paralelogramo cuyos lados son respectivamente iguales a la mitad de las diagonales.

496. Probar estas dos propiedades del trapecio isósceles: 1.ª, son iguales entre sí los ángulos adyacentes a cada base; 2.ª, la recta que pasa por los puntos medios de las bases es perpendicular a dichas bases y eje de simetría del trapecio.

30. Longitud de la circunferencia

226. Circunferencia rectificada. — Si adaptamos un hilo flexible a la periferia de un aro, por ejemplo, y cortamos el hilo sobrante, obtendremos (después de extender el hilo) un segmento cuya longitud equivale a la de la circunferencia del aro en cuestión (fig. 168). El segmento citado se llama *circunferencia rectificada.*

Sustituyendo el hilo por una cinta métrica, podemos medir rápidamente la circunferencia de una rueda, de una moneda, de un disco, etc.

FIG. 168

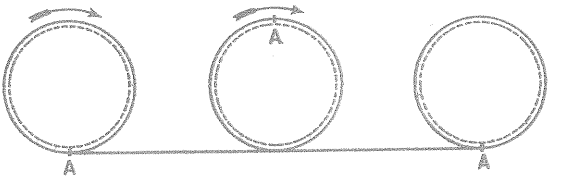


FIG. 169

Otra manera de obtener directamente la medida de la circunferencia del aro antes considerado, sería hacerle rodar sobre una mesa hasta dar una vuelta completa, lo que comprobaríamos marcando en el aro el punto *A* en que se apoya y fijándonos cuándo dicho punto vuelve a tocar otra vez a la mesa. El camino *AA* recorrido en esta vuelta será la longitud de la circunferencia (fig. 169).

227. Razón de la circunferencia a su diámetro. — Si por uno de los procedimientos anteriores, o por otro cualquiera, medimos la longitud de la circunferencia de una rueda y luego medimos el diámetro y dividimos la primera medida por la segunda, obtendremos un cociente aproximadamente igual a 3'14. Si repetimos la experiencia con otros objetos circulares (potes, platos, rueda de una bicicleta, etc.), hallaremos siempre números aproximados a 3'14. Expresamos esto diciendo que:

La razón de la circunferencia a su diámetro es constante. El valor de esta razón se representa por la letra griega π.

Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{\text{circunferencia}}{\text{diámetro}} = \pi \qquad [1]$$

Los babilonios y otros pueblos de la antigüedad se contentaban con dar a π el valor 3; es decir, para ellos, la longitud de la circunferencia era, aproximadamente, el triplo de la del diámetro.

Los griegos hallaron para π el valor aproximado $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$; o sea, una circunferencia tiene una longitud aproximadamente igual a 3 veces su diámetro más una séptima parte del mismo.

Hoy se ha llegado a calcular el número π con mucha aproximación. Su valor, expresado con 10 cifras decimales exactas, es

$$\pi = 3'1415926535...$$

y el de su recíproco, empleado también con mucha frecuencia,

$$\frac{1}{\pi} = 0'3183098861...$$

En los cálculos ordinarios se hace uso generalmente, de los valores

$$\pi = 3'1416 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\pi} = 0'3183$$

228. Longitud de la circunferencia. — De la razón [1] se deduce:

$$\text{circunferencia} = \text{diámetro} \times \pi$$

O sea, representando por C la longitud de la circunferencia y por d el diámetro:

$$C = d \times \pi$$

y como el diámetro vale dos radios, se tiene finalmente:

$$\boxed{C = 2\,\pi\,r}$$

lo cual nos dice que *para hallar la longitud de una circunferencia se multiplica* 2π *por el radio.*

EJEMPLO. — ¿Cuál es la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 4 m?
Sustituyendo en $C = 2\pi r$, se tiene: $C = 2 \times 3'1416 \times 4 = 25'1328$ m.

229. Cálculo del radio. — Dividiendo por 2π los dos miembros de la igualdad $C = 2\pi r$ resulta:

$$r = \frac{C}{2\pi} \quad \text{o lo que es igual} \quad r = \frac{C}{2} \times \frac{1}{\pi}$$

resultado que prueba que *el radio de una circunferencia se halla multiplicando la longitud de la semicircunferencia por el recíproco de* π.

EJEMPLO. — ¿Cuál será el radio de una circunferencia que mide 127 metros?

$$r = \frac{C}{2} \times \frac{1}{\pi} = \frac{127}{2} \times 0'3183 = 20'21205 \text{ m}$$

230. Longitud de un arco de circunferencia. — *La longitud de un arco de* n *grados se obtiene multiplicando* $\frac{\pi r}{180}$ *por* n.

En efecto: como las longitudes de los arcos son proporcionales a sus respectivas graduaciones, podemos razonar así:

Longitud de media circunferencia (arco de 180°) $= \pi r$

Longitud de un arco de 1° ..... $= \frac{\pi r}{180}$

$$\text{Longitud de un arco de n° ..... } l = \frac{\pi r n}{180}$$

OBSERVACIÓN. — La medida n del arco puede venir expresada en grados y minutos, o en grados, minutos y segundos. Entonces habrá que reducir el número n a minutos, o a segundos, y sustituir 180 en la fórmula por su correspondiente valor en minutos, o en segundos.

EJEMPLO. — ¿Cuál será la longitud de un arco de 56° 22′ perteneciente a una circunferencia de 27 metros de radio?

Como 56° 22′ equivalen a 3.382′, y 180° = 10.800′, la fórmula anterior se convierte en

$$l = \frac{3'1416 \times 27 \times 3.382}{10.800} = 26'562 \text{ m}$$

Si el arco estuviera expresado en grados centesimales, el razonamiento sería el siguiente:

A 200 grados centesimales corresponde la longitud πr

A 1 grado centesimal corresponderá la longitud $\frac{\pi r}{200}$

A n^g corresponderá la longitud ..... $l = \frac{\pi r n}{200}$

EJEMPLO. — Hallar la longitud de un arco de $63^g\ 85^m$ perteneciente a una circunferencia de 12 metros de radio.

Aquí no es necesario reducir n a minutos; basta expresarlo en fracción decimal de grados centesimales, dejando luego invariable el 200 de la fórmula.

Así, como $63^g\ 85^m$ equivalen a $63'85^g$, reemplazando en la fórmula, tendremos:

$$l = \frac{3'1416 \times 12 \times 63'85}{200} = 12'035 \text{ m}$$

231. Rectificación aproximada de la circunferencia. — Rectificar una curva es hallar un segmento rectilíneo que tenga la misma longitud que dicha curva.

No es posible hallar ningún segmento rectilíneo que represente exactamente la longitud de la circunferencia, pero puede hacerse con alguna aproximación al tomar un segmento que equivalga a tres veces el diámetro y una séptima parte del mismo (fig. 170).

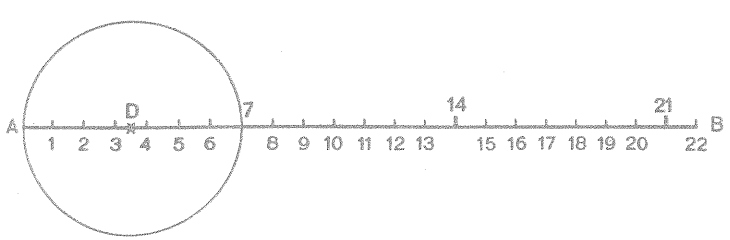


FIG. 170

Con esto no hacemos sino tomar para π el valor

$$\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

en la fórmula

$$C = 2\pi r \quad \text{o su equivalente} \quad C = \pi d$$

EJERCICIOS

497. Hallar mentalmente la longitud de las circunferencias cuyos diámetros miden: 1 m; 10 Km; 100 m; 0'1 m; 20 m.

498. Calcular la longitud de las circunferencias cuyos diámetros miden: 3 m; 4'75 m; 37 dm; 42 cm; 29'8 Km.

499. Calcular la longitud de las circunferencias cuyos radios miden: 2 m; 1'25 m; 16 dm; 64 cm; 13'6 Km.

500. Hallar el diámetro de las circunferencias cuya longitud es: 314'16 m; 6'2832 Km; 0'31416 m; 1 Km; 100 m.

501. Hallar el radio de las circunferencias cuya longitud es: 18 m; 140 m; 2.468 cm; 893 Km; 40.000 Km.

502. La rueda de un carruaje tiene 0'45 m de radio. ¿Cuántos metros de carretera habrá recorrido después de dar mil vueltas.

503. La rueda de una bicicleta, en marcha, ha dado 10.000 vueltas para recorrer 22.619'52 m. ¿Qué radio tiene esa rueda?

504. La rueda de un automóvil tiene 0'75 m de diámetro. Hallar las vueltas que tendrá que dar para recorrer 6.479'55 m.

505. ¿Qué distancia recorre en un día el extremo de la aguja mayor de un reloj, suponiendo que la longitud de dicha aguja es de 1'5 cm?

506 ¿Cuánto mide el radio de una pista circular, si un motorista que recorre 28 metros por segundo ha empleado 2 minutos 9 segundos en recorrerla?

507. Las ruedas delanteras de un coche de caballos tienen 40 cm de radio y las traseras, 65 cm. Calcular cuántas vueltas más darán las primeras que las segundas para recorrer 4 Km.

508. Las ruedas delanteras de un carruaje tienen 0'85 m de diámetro, y dan 25 vueltas mientras las traseras dan 18. Hallar la longitud de la circunferencia de las dos ruedas.

509. En un cuadrado de 112 metros de perímetro se traza una circunferencia inscrita. Calcular su longitud.

510. Las ruedas de un coche tienen 65 cm de diámetro. ¿Cuántas vueltas dan por segundo cuando el auto lleva una velocidad de 60 Km por hora?

511. En una circunferencia de 6 m de radio, ¿qué longitud tienen los arcos de: 45°; 60°; 18°; 110°; 97°?

512. Hallar la longitud de un arco de 8 dm de radio y cuya graduación es 72° 18′ 24″.

513. Hallar la longitud de un arco de $40^{g}\ 38^{m}$, perteneciente a una circunferencia de 40 cm de radio.

514. Calcular en la división sexagesimal la graduación de un arco de 20 m de longitud, perteneciente a una circunferencia de 5 m de radio.

515. Resolver el mismo problema, expresando el arco en la división centesimal.

516. Calcular en grados, minutos y segundos sexagesimales la graduación del arco cuya longitud es igual al radio con que está trazado.

31. Areas de polígonos

232. Área del rectángulo. — Como vimos en el párrafo 79, *el área de un rectángulo se obtiene multiplicando los números que expresan la medida de su base y su altura, referidos a la misma unidad.*

Aun cuando esta regla fue demostrada suponiendo que las medidas de los lados estaban expresadas en números enteros, es también válida para medidas decimales. Es decir que, llamando b a la base y h a la altura de un rectángulo, si, por ejemplo, es $b = 4'8$ cm y $h = 3'2$ cm, el área del rectángulo será

$$4'8 \times 3'2 = 15'36 \text{ cm}^2$$

En efecto: Expresadas en milímetros las medidas b y h, serán $b = 48$ mm y $h = 32$ mm, en cuyo caso el área del rectángulo es

$$48 \times 32 = 1.536 \text{ mm}^2 = 15'36 \text{ cm}^2$$

FÓRMULA. — De un modo general y abreviado, expresaremos el área de un rectángulo de base b y altura h mediante la fórmula

$$\mathbf{A = b \times h}$$

en la que podemos hallar cualquiera de las tres cantidades, A, b o h, conociendo las otras dos.

233. Área del cuadrado. — El cuadrado es un rectángulo cuya base y altura son iguales; luego, para hallar el área de un cuadrado bastará multiplicar por sí mismo el número que expresa la medida de su lado.

El producto de un número l por sí mismo se expresa abreviadamente por l^2 y se llama cuadrado de l. Por tanto, diremos:

El área de un cuadrado es igual al cuadrado de la medida de su lado.

FÓRMULA. — Designando por l el lado del cuadrado y por A el área, tendremos:

$$A = l^2$$

EJEMPLO. — El área de un cuadrado de 1'5 m de lado será:

$$A = l^2 = 1'5^2 = 1'5 \times 1'5 = 2'25 \text{ m}^2$$

234. **Área del paralelogramo.**— En un paralelogramo llamamos *altura* a la distancia entre dos lados paralelos, y cada uno de estos lados se llama *base* correspondiente a dicha altura.

Dibujemos un paralelogramo en un papel fuerte y recortémosle (figura 171). Si luego le partimos según una perpendicular a las bases y colocamos los trozos obtenidos según indica la figura 172, habremos transformado el paralelogramo en un rectángulo con la misma base e igual altura que aquél. Además, como las dos figuras se componen de las mismas partes, aunque colocadas de distinta forma, diremos que son equivalentes. En general, tendremos:

Todo paralelogramo es equivalente a un rectángulo de la misma base y la misma altura.

Luego, para hallar el área de un paralelogramo bastará calcular el área del rectángulo equivalente. De ahí que digamos:

El área de un paralelogramo es igual al producto de las medidas de su base y su altura.

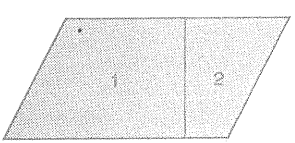


FIG. 171

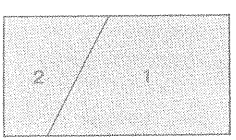


FIG. 172

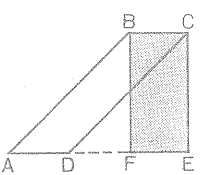


FIG. 173

Cuando la altura no corta al lado elegido como base, como sucede en el paralelogramo $ABCD$ (fig. 173), es imposible la construcción anterior, y entonces habremos de razonar de otro modo.

Desde los extremos del lado *BC* tracemos perpendiculares a la base; formaremos así un rectángulo *BCEF* de la misma base e igual altura que el paralelogramo. Por otra parte, si al paralelogramo dado le sumamos el triángulo *DEC*, obtendremos el trapecio *ABCE*, y quitando luego a éste el triángulo *ABF*, igual al añadido, quedará una figura equivalente al paralelogramo. Ahora bien: dicha figura es precisamente el rectángulo *BCEF*. Luego, la regla dada anteriormente es siempre válida.

Fórmula. — De un modo general, expresaremos el área de un paralelogramo de base *b* y altura *h* mediante la fórmula

$$A = b \times h$$

235. Área del triángulo. — Conforme vimos en el párrafo 225, dado un triángulo cualquiera *ABC* (fig. 174), es fácil formar con otro igual, *ACD*, un paralelogramo, cuya área será, por tanto, *doble* de la del triángulo. Como dicho paralelogramo tiene además la misma base *BC* e igual altura *AE* que el triángulo, podemos enunciar:

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las medidas de su base y su altura.

Fórmula. — Designando por *A* el área del triángulo, por *b* la longitud de la base y por *h* la de la altura, tendremos:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

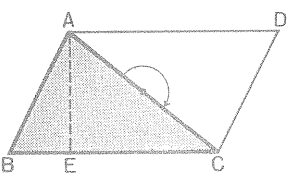


Fig. 174

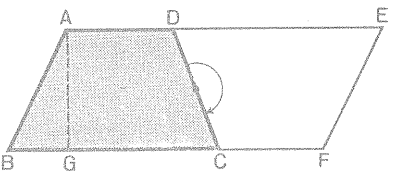


Fig. 175

236. Área del trapecio. — Vimos también (224) cómo, dado un trapecio cualquiera *ABCD* (fig. 175), se puede formar con otro igual, *CDEF*,

un paralelogramo, cuya área será, por tanto, *doble* de la del trapecio. Dicho paralelogramo tiene la misma altura que el trapecio, y la base está compuesta por la *suma* de las bases del trapecio. Luego, aplicando la regla dada para el área del paralelogramo, se deduce:

El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de la suma de las medidas de las bases por la medida de la altura.

Se obtiene el mismo resultado multiplicando directamente la *semisuma* de las bases, o sea la *paralela media,* por la altura.

FÓRMULA. — Designando por A el área del trapecio, por b la base mayor, por b' la base menor, y por h la altura, tendremos:

$$A = \frac{(b+b')\,h}{2} = \frac{b+b'}{2} \times h$$

237. **Área del rombo.** — Si por los vértices de un rombo *ABCD* (figura 176) trazamos paralelas a sus diagonales, obtendremos un rectángulo *MNPQ* cuyos lados son iguales a las diagonales del rombo. Como se ve en la figura, dicho rectángulo está formado por ocho triángulos iguales, cuatro de los cuales constituyen el rombo. Por consiguiente, como el área del rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones, tendremos:

El área de un rombo es igual a la mitad del producto de las medidas de sus diagonales.

FÓRMULA. — De un modo general, expresaremos el área de un rombo, cuyas diagonales sean d y d', mediante la fórmula

$$A = \frac{d \times d'}{2}$$

238. **Área de un polígono cualquiera.** — Para hallar el área de un polígono cualquiera, se le descompone en triángulos, trapecios y paralelogramos, se calcula el área de cada una de esas partes y se suman luego los resultados.

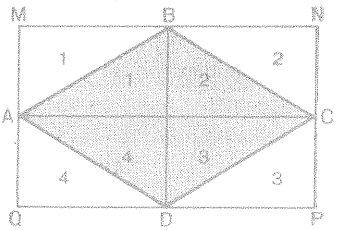


FIG. 176

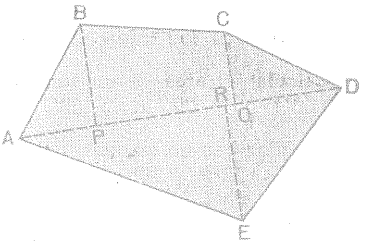


FIG. 177

La descomposición del polígono en figuras cuya área sea fácil hallar puede hacerse de distintas maneras. En la práctica, sin embargo, se acostumbra a tomar la diagonal mayor y luego se trazan perpendiculares a ella desde los distintos vértices del polígono (fig. 177).

EJERCICIOS

517. Calcular el área de un rectángulo cuya base y altura miden, respectivamente: *a)* 15 m y 9 m; *b)* 21'43 m y 16'50 m; *c)* 4'82 m y 321'5 cm.

518. Calcular el área de un rectángulo cuyo perímetro y base miden, respectivamente: *a)* 44 cm y 12 cm; *b)* 5'29 m y 1'85 m; *c)* 14 cm y 51 mm.

519. Hallar la base de un rectángulo cuya área y altura son: *a)* 918 m^2 y 27 m; *b)* 112 cm^2 y 9'3 cm; *c)* 140 m^2 y 97 dm.

520. Hallar el área de un cuadrado que tiene: *a)* 132 m de lado; *b)* 17'8 dm de lado; *c)* 4'75 Km de perímetro.

521. Hallar el área de un paralelogramo cuya base y altura miden: *a)* 5'40 cm y 3'65 cm; *b)* 4'25 m y 85 cm; *c)* 16'24 dm y 148 mm.

522. Hallar la base de un paralelogramo cuya área y altura son: *a)* 2.322 m^2 y 43 m; *b)* 1.000 dm^2 y 0'25 Dm; *c)* 15.120 mm^2 y 34 cm.

523. Calcular el área de un triángulo cuya base y altura miden: *a)* 3'2 Dm y 23 m; *b)* 75 dm y 427 cm; *c)* 16 cm y 127 mm.

524. Calcular la altura de un triángulo cuya área y base son: *a)* 450'8 m^2 y 23 m; *b)* 210.870 mm^2 y 71 cm; *c)* 56'25 m^2 y 0'15 Hm.

525. Hallar el área de un trapecio cuyas bases y altura son: *a)* 7'5 cm, 6'7 cm y 5'4 cm; *b)* 14 m, 124 dm y 924 cm; *c)* 1'18 Hm, 11'2 Dm y 91 m.

526. Calcular una de las bases de un trapecio, sabiendo que la otra mide 38'5 m, la altura es 350 dm y el área, 2.467'50 m^2.

527. Calcular el área de un rombo cuyas diagonales miden: *a)* 34 m y 48 m; *b)* 3'45 m y 2'96 m; *c)* 28'5 cm y 196 mm.

528. Calcular una de las diagonales de un rombo, sabiendo que la otra y el área son: *a)* 22 m y 308 m^2; *b)* 0'8 m y 48 dm^2; *c)* 2'34 dm. y 230'49 cm^2.

529. Tomando con un doble decímetro las medidas que sean necesarias, calcular el área del polígono representado en la figura 177.

530. Calcular el área de un rectángulo de 103'8 m de perímetro, sabiendo que la base es el doble de la altura.

531. Un terreno de 1 hectárea, 20 áreas y 75 centiáreas tiene forma de triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos mide 230 m. Calcular el otro cateto.

532. Se ha comprado una finca de forma rectangular por 23.850 ptas. Sabiendo que la hectárea ha resultado a 64.000 ptas. y que uno de los lados del campo mide 225 m, se desea averiguar el perímetro de la finca.

533. Un campo tiene forma de trapecio, y sus bases, que distan entre sí 89 m, miden 124 m y 106 m. Hallar el valor de ese campo, vendido a 570 ptas. el área.

534. Un solar tiene forma de trapecio. Su altura mide 25 m, y una de sus bases, 36 m. Sabiendo que, comprado a 625 ptas. el metro cuadrado, costó 468.750 ptas., se desea averiguar la base desconocida.

32. Area del círculo y figuras circulares

239. Polígono regular. — Dijimos ya que *polígono regular es el que tiene todos sus lados y ángulos iguales.*

El triángulo equilátero y el cuadrado son polígonos regulares.

En todo polígono regular *ABCDE* (fig. 178) existe un punto *O*, llamado *centro,* que equidista de los lados y de los vértices.

Radio de un polígono regular es el segmento rectilíneo *OA* que une el centro con un vértice cualquiera.

Apotema de un polígono regular es el segmento *OF* de perpendicular trazada desde el centro a un lado cualquiera.

Los radios de un polígono regular son bisectrices de los ángulos del polígono. Cada dos radios consecutivos forman un ángulo, cuya medida se obtiene dividiendo cuatro rectos, o 360°, por el número de lados del polígono.

Las circunferencias de centro *O* y trazadas con radios iguales a la apotema y al radio del polígono, están respectivamente inscrita y circunscrita al polígono regular.

240. Construcción de polígonos regulares sencillos. — Si dividimos una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales y trazamos las cuerdas correspondientes a los arcos que han resultado, obtendremos un polígono regular inscrito en la circunferencia. El problema de construir polígonos regulares queda reducido, por consiguiente, al de dividir la cir-

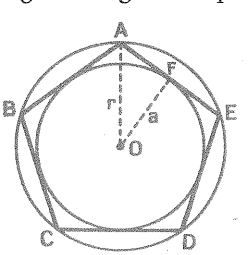


FIG. 178

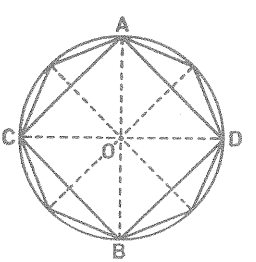


FIG. 179

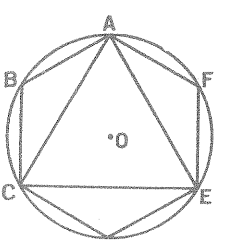


FIG. 180

cunferencia en tantos arcos iguales como lados haya de tener el polígono que se desea.

PROBLEMA 1.º — *Dividir una circunferencia en* 4, 8. 16, ..., *partes iguales.* — Para dividir una circunferencia en *cuatro* partes iguales, bastará construir dos diámetros *AB* y *CD* perpendiculares entre sí (fig. 179).

Si luego trazamos las bisectrices de los ángulos formados por los diámetros perpendiculares, habremos dividido la circunferencia en *ocho* partes iguales; las bisectrices de los nuevos ángulos la dividirán en 16, y procediendo sucesivamente de un modo análogo, podríamos dividirla en 32, 64, ..., etc., partes iguales.

A partir de estas divisiones obtendremos la construcción del *cuadrado,* del *octágono regular* y de los polígonos regulares de 16, de 32, etc. lados.

PROBLEMA 2.º — *Dividir una circunferencia en* 3, 6, 12, ..., *partes iguales.* — Es fácil comprobar que sobre una circunferencia puede llevarse 6 veces exactamente una cuerda igual al radio, de modo que cada cuerda sea consecutiva con la anterior. De ahí que, para dividir una circunferencia en *seis* partes iguales, bastará tomar en ella seis veces un arco cuya cuerda sea igual al radio (fig. 180).

Dividida la circunferencia en seis partes, quedará dividida en *tres,* pues basta considerar los arcos que comprenden dos divisiones de las anteriores.

Trazando las bisectrices de los ángulos formados por los radios que pasan por los puntos de división en seis partes, se habrá dividido la circunferencia en 12 partes y así sucesivamente podríamos dividirla en 24, 48, etc.

Con la circunferencia dividida en 3, 6, 12, ..., partes iguales, obtendremos la construcción del *triángulo, hexágono, dodecágono* regulares y de los polígonos regulares de 24, 48, etc. lados.

241. Área del polígono regular.

El área de un polígono regular es igual al semiproducto del perímetro por la apotema.

Consideremos un polígono regular *ABCDEF* (fig. 181), y sea *l* el lado, *a* la apotema y *n* el número de lados.

Uniendo los vértices con el centro *O* del polígono, resultan tantos triángulos iguales como lados hay en el polígono; y como el área de cada uno de ellos es igual al semiproducto del lado del polígono por la apotema, se tiene:

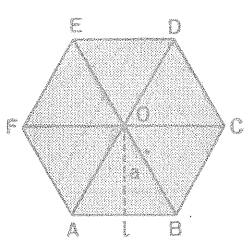


FIG. 181

$$\text{Área} = \frac{la}{2} \times n = \frac{la \times n}{2} = \frac{ln \times a}{2}$$

Siendo ln igual al perímetro p, resulta:

$$\textbf{Área} = \frac{\mathbf{p\,a}}{\mathbf{2}}$$

EJEMPLO. — Un hexágono regular cuyo lado mide 13 metros y la apotema, 11'258 metros, tendrá por área

$$A = \frac{p\,a}{2} = \frac{13 \times 6 \times 11'258}{2} = 439'062 \text{ m}^2$$

242. Área del círculo.

El área del círculo es igual al semiproducto de la circunferencia por el radio, o bien, al producto de π por el cuadrado del radio (fig. 182).

En efecto: Si inscribimos en un círculo un polígono regular, por ejemplo un octágono, su área será menor que la del círculo; si en lugar de un octágono hubiéramos inscrito un polígono de 16 lados, la diferencia con el círculo sería menor que antes, y aún sería mucho menor si inscribiéramos un polígono de 32 lados. De este modo, es decir, duplicando sucesivamente el número de lados del polígono, haríamos que el polígono se fuera aproximando cada vez más al círculo, y llegaría un momento en que a simple vista no podríamos distinguir el contorno del polígono de la circunferencia en que estuviera inscrito; entonces, la apotema de aquél se confundiría con el radio del círculo y el área del polígono podríamos considerarla como igual, sensiblemente, a la del círculo.

Resulta, por consiguiente, que un círculo se puede considerar como el límite a que tiende un polígono regular inscrito, cuando se duplica sucesiva e indefinidamente el número de lados. En el límite, el área del polígono se confunde con la del círculo, y el perímetro y apotema del polígono toman por valores respectivos las longitudes de la circunferencia y del radio. Según esto, reemplazando en la fórmula anterior el perímetro p por la circunferencia C y la apotema a por el radio r, obtendremos:

$$\text{Área} = \frac{C\,r}{2} = \frac{2\pi r \times r}{2}$$

o, simplificando,

$$\text{Área} = \pi\, r^2$$

EJEMPLO. — El área de un círculo cuyo radio mide 17 cm, será

$$A = \pi r^2 = 3'1416 \times 17^2 = 907'9224 \text{ cm}^2$$

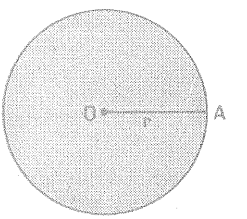


FIG. 182

243. Área del sector circular.

El área de un sector circular de n grados se obtiene multiplicando $\frac{\pi r^2}{360}$ por n (fig. 183).

En efecto: Considerando al círculo como un sector de 360°, y teniendo en cuenta que las áreas de los sectores circulares son proporcionales a sus arcos respectivos, podemos razonar del siguiente modo:

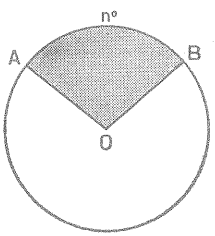


FIG. 183

Área de un sector de $360° = \pi r^2$

Área de un sector de $1° = \frac{\pi r^2}{360}$

$$\text{Área de un sector de n°} = \frac{\pi r^2 n}{360}$$

Si el arco viniera expresado en grados centesimales, la fórmula anterior se transforma en esta otra:

$$\text{Área} = \frac{\pi r^2 n}{400}$$

OBSERVACIÓN. — Si *n* contiene grados y minutos o grados, minutos y segundos, es necesario reducir *n* y 360 (o 400) a minutos o a segundos, según el caso.

EJEMPLO 1.° — Hallar el área de un sector circular de 146° 52′ 88″ perteneciente a un círculo de 4 dm de radio.

Como 146° 52′ 88″ equivalen a 528.808″ y 360° = 1.296.000″, sustituyendo en la fórmula, resulta:

$$\text{Área} = \frac{3'1416 \times 4^2 \times 528.808}{1.296.000} = 20'5099 \text{ dm}^2$$

EJEMPLO 2.° — Un círculo tiene 14 cm. de radio. ¿Cuál es el área de un sector de $372^g\ 84^m\ 12^s$?

Como $372^g\ 84^m\ 12^s = 372'8412^g$, tendremos:

$$\text{Área} = \frac{3'1416 \times 14^2 \times 372'8412}{400} = 573'945 \text{ cm}^2$$

244. OTRA EXPRESIÓN DEL ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR. — *El área de un sector circular es igual al semiproducto de la longitud del arco base por la del radio.*

En efecto: las fórmulas

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360°} \qquad \text{y} \qquad A = \frac{\pi r^2 n}{400}$$

que expresan el área de un sector circular, se pueden escribir también así:

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360°} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi r n}{180} \times r = \frac{1}{2} l r$$

$$A = \frac{\pi r^2 n}{400} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi r n}{200} \times r = \frac{1}{2} l r$$

EJEMPLO. — Hallar el área de un sector circular perteneciente a un círculo de 5 metros de radio y cuyo arco base mide 0'7854 metros.

Según la fórmula anterior, tendremos:

$$A = \tfrac{1}{2} l r = \frac{0'7854 \times 5}{2} = 1'9635 \text{ m}^2$$

245. **Área del segmento circular.** — Observando las figuras 184 y 185 podemos ver claramente que el área de un segmento circular es igual a la *diferencia,* o a la *suma,* de las áreas del sector correspondiente al arco del segmento, y del triángulo que tiene por base la cuerda del segmento y por vértice el centro del círculo, según que el arco del segmento considerado sea *menor,* o *mayor,* que media circunferencia.

Efectivamente, según la figura 184, se tiene:

Área ACB = Área sector OACB − Área triáng. OAB

Y según la figura 185, resulta:

Área ACB = Área sector OACB + Área triáng. OAB

EJEMPLO. — Hallar el área de un segmento circular de 120° perteneciente a un círculo de 12 m de radio, sabiendo que la cuerda correspondiente mide 20'78 m y dista del centro 6 metros.

$$A = \text{área sector} - \text{área triángulo} = \frac{\pi r^2 n}{360} - \frac{b \times h}{2} =$$

$$= \frac{3'1416 \times 12^2 \times 120}{360} - \frac{20'78 \times 6}{2} = 150'78 - 62'34 = 88'44 \text{ m}^2$$

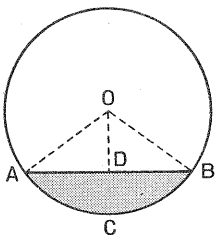


FIG. 184

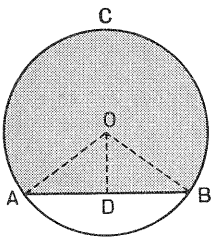


FIG. 185

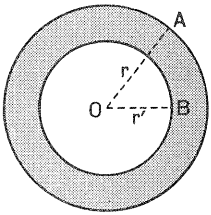


FIG. 186

246. Área de la corona circular.— *Corona circular* es la porción de plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas (fig. 186).

Fácilmente se comprende que:

> **El área de una corona circular se obtiene restando las áreas de los círculos respectivos.**

En efecto: si del círculo de radio *OA* (fig. 186) restamos el de radio *OB*, nos quedará la corona circular. Por tanto, designando por r y r' los radios respectivos, se tiene:

$$\text{Área} = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

EJEMPLO. — Hallar el área de la corona limitada por dos circunferencias cuyos radios miden 12 y 8 dm, respectivamente.

$$A = \pi (r^2 - r'^2) = 3'1416 (12^2 - 8^2) = 3'1416 \times 80 = 251'33 \text{ dm}^2$$

247. Área de una figura limitada por una curva.— El área de una figura de contorno curvilíneo puede hallarse sustituyendo aproximadamen-

te dicha figura por un polígono equivalente y calculando el área de éste. Si se trata de una figura pequeña, emplearemos uno de estos dos procedimientos:

1) Se aplica sobre la figura un papel transparente cuadriculado y se cuentan los cuadrados que han quedado dentro de la curva; a este resultado se añadirán las fracciones de cuadrados comprendidos en la curva, agrupando aquellas que sensiblemente sumen un cuadrado.

La operación se facilita si la cuadrícula está dividida en cm^2 y mm^2, como se indica en la figura 187.

2) Se dibuja la figura cuya área se quiere calcular sobre una cartulina o sobre una plancha metálica, de grueso homogéneo, se recorta la figura y se pesa.

El cociente de dividir el peso hallado por el peso de 1 dm^2 de esa cartulina, o de esa plancha, será el área de la figura, expresada en decímetros cuadrados.

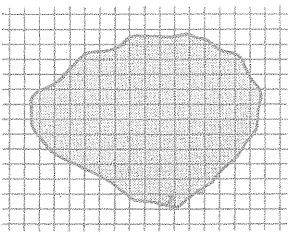


FIG. 187

EJEMPLO. — Una figura recortada en hojalata pesa 9 gramos. ¿Cuál será su área sabiendo que 1 dm^2 del mismo material pesa 24 gramos?

$$\text{Área} = \frac{9}{24} = 0'3750 \text{ dm}^2 = 37'50 \text{ cm}^2$$

EJERCICIOS

535. Calcular el área: *a)* de un hexágono regular cuyo lado mide 6 m y su apotema 5'196 m; *b)* de un octógono regular cuyo lado mide 0'4 Dm y su apotema 48 dm.

536. Calcular el área de un círculo cuyo radio mide: *a)* 22 cm; *b)* 3'12 m; *c)* 88 mm; *d)* 1'12 dm.

537. Hallar el área de un círculo cuya circunferencia mide: *a)* 4 m; *b)* 32 mm; *c)* 5'4 cm; *d)* 6'25 mm.

538. Hallar el área de un sector circular cuyo arco y radio miden: *a)* 45° y 7'4 m; *b)* 62^g y 2'4 m; *c)* 54° 12′ y 13 dm; *d)* $72^g\ 18^m\ 66^s$ y 20 m.

539. En un círculo de 3 dm de radio, ¿cuánto medirá el arco de un sector circular que tiene por área 1'0472 dm^2? Hállese la graduación en las divisiones sexagesimal y centesimal.

540. Hallar el área de un segmento circular cuyos datos son: *a)* $r = 20$ m, $n = 60°$, $b = 20$ m, $h = 17'32$ m; *b)* $r = 6$ dm, $n = 120°$, $b = 10'40$ dm, $h = 3$ dm.

541. Hallar el área de una corona circular comprendida entre dos circunferencias cuyos radios miden: *a)* 6 dm y 42 cm; *b)* 0'7 Dm y 5 m.

542. Hallar el área de un cuadrado inscrito en un círculo de 78'54 centímetros cuadrados de área.

543. Dos circunferencias son tangentes interiores, siendo 8 cm la distancia entre los centros y 1'2 dm la suma de los radios. Hallar el área de la porción de círculo comprendida entre las dos circunferencias.

544. Hallar el área de un sector circular de 19° 43′ 18″, perteneciente a un círculo de 1'4 dm de diámetro.

545. Determinar los grados, minutos y segundos sexagesimales del ángulo correspondiente a un sector circular cuya área es igual a 31'416 m^2, siendo 62'832 m la longitud de la circunferencia a que pertenece.

546. Se inscribe un cuadrado en un círculo de 10 m de diámetro. Calcular el área de los cuatro segmentos que los lados del cuadrado determinan sobre el círculo.

547. Hallar el área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias, siendo 13 m la suma de sus radios y 7 m la diferencia de los mismos.

548. Dibujar dos circunferencias concéntricas tales que el radio de la mayor sea doble del de la menor. Demostrar que el área de la corona circular que se obtiene es triple del área del círculo menor.

549. Dibujar una figura de contorno curvilíneo y hallar su área.

INDICE

	PÁGS.
LECCIÓN 1.ª — Los números naturales	3
LECCIÓN 2.ª — Numeración	7
LECCIÓN 3.ª — La adición	12
LECCIÓN 4.ª — La sustracción	17
LECCIÓN 5.ª — Sumas y diferencias combinadas	20
LECCIÓN 6.ª — La multiplicación	23
LECCIÓN 7.ª — La división	32
LECCIÓN 8.ª — Los números decimales	39
LECCIÓN 9.ª — Operaciones con números decimales	42
LECCIÓN 10. — Sistema métrico decimal. Unidades de longitud	48
LECCIÓN 11. — Unidades de superficie y de volumen	54
LECCIÓN 12. — Unidades de capacidad y de peso. Monedas	61
LECCIÓN 13. — Fracciones ordinarias	67
LECCIÓN 14. — Adición y sustracción de fracciones	74
LECCIÓN 15. — Multiplicación y división de fracciones	78
LECCIÓN 16. — Multiplicación y división de fracciones *(continuación)*	83
LECCIÓN 17. — La regla de tres simple	88
LECCIÓN 18. — La recta y el segmento. El plano	94
LECCIÓN 19. — Las magnitudes angulares	101
LECCIÓN 20. — Medida de los ángulos y del tiempo	108
LECCIÓN 21. — Transformación de números concretos	111
LECCIÓN 22. — Operaciones con números concretos	116
LECCIÓN 23. — La circunferencia y el círculo	124
LECCIÓN 24. — Rectas perpendiculares	132
LECCIÓN 25. — Relación entre ángulos y arcos	141
LECCIÓN 26. — Rectas paralelas	147
LECCIÓN 27. — Posiciones de rectas y circunferencias	156
LECCIÓN 28. — Polígonos: triángulos	161
LECCIÓN 29. — Cuadriláteros	173
LECCIÓN 30. — Longitud de la circunferencia	181
LECCIÓN 31. — Áreas de polígonos	187
LECCIÓN 32. — Área del círculo y figuras circulares	193